УДК 539.3

Э. В. Антоненко, Ю. А. Блинков, С. С. Иванов

О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ С ВЕСОВОЙ СТУПЕНЧАТОЙ ФУНКЦИЕЙ В ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ УПРУГИХ ТЕЛ

Математическое содержание проблем устойчивости и колебаний механических систем сводится к решению задач Штурма-Лиувилля. Рассматриваются линейные однородные дифференциальные уравнения с однородными краевыми условиями. Коэффициенты дифференциальных уравнений содержат параметр, через который выражается критическая нагрузка или собственная частота. Находится значение параметра, для которого существует функция, удовлетворяющая всем краевым условиям и дифференциальному уравнению.

Задачи о собственных частотах поперечных колебаний стержней [1], осесимметричных оболочечных колебаний цилиндров и потери их устойчивости при действии внешнего давления [2, 3] описываются дифференциальным уравнением

$$\psi^{IV}(x) - k^4\psi(x) = 0, \tag{1}$$

где $\Psi(x)$ - функция прогиба оси стержня или радиальные перемещения оболочки, x - осевая координата. Рассматривая однородные конструкции, имеем для колебаний стержней и гладких оболочек

$$k^4 = \frac{m\omega^2}{EI}; \quad k^4 = \frac{\omega^2\rho h}{D} - \frac{Eh}{DR^2}. \tag{2}$$

В задаче устойчивости оболочки

$$k^4 = \frac{n^4(n^2-1)}{EhR^3}\left[P_* - \frac{D(n^2-1)}{R^3}\right]. \tag{3}$$

Здесь и далее обозначения общепринятые [1], m - погонная масса стержня, EI - его изгибная жесткость. Длину стержня и оболочки обозначим l, начало координат поместим на одном из краёв, введем параметр $\alpha = kl$. Из (2) и (3) получим собственные частоты

$$\omega^2 = \alpha^4 \frac{EI}{ml^4}, \quad \omega^2 = \frac{E}{\rho R}\left(1+\alpha^4 \frac{DR^2}{Ehl^4}\right) \tag{4}$$

и критическое давление потери устойчивости

$$P_* = \frac{D(n^2-1)}{R^3}\left[1+\alpha^4 \frac{EhR^6}{Dl^4 n^4 (n^2-1)^2}\right].$$

Рассмотрим составные конструкции, представляющие собой последовательно соединенные вдоль продольной оси x стержни или оболочки с постоянной толщиной и жесткостью на i-м участке. Тогда полная длина конструкции $l=\sum\limits_{i=1}^{N} l_i$, где N - число участков или количество соединенных стержней (оболочек). Поместив начало оси x на левом краю конструкции, будет иметь краевые условия в сечениях $x = 0$ и $x = l$. Дифференциальное уравнение задачи имеет вид (1), где

$$k = k(x) = \begin{cases} k_1,\ 0 \le x \le l_1; \\ k_i,\ \sum\limits_{j=1}^{i-1} l_j \le x \le \sum\limits_{j=1}^{i+1} l_j; \\ k_N,\ \sum\limits_{i=1}^{N-1} l_i \le x \le l. \end{cases} \tag{5}$$

Зависимости (1) и (5) представляют задачу о собственных значениях с весовой ступенчатой функцией.

Искомые параметры ω или P_* постоянны для всей конструкции (всей совокупности её частей). Это утверждение позволяет установить связь между коэффициентами k или α на разных участках.

Например, из (4) получим

$$\alpha_{i+1}^4 = \alpha_i^4 \lambda\gamma; \ \ \lambda = \frac{l_{i+1}}{l_i}; \ \ \gamma = \sqrt[4]{\left(\frac{EI}{m}\right)_i \left(\frac{m}{EI}\right)_{i+1}}. \tag{6}$$

Решение задач упрощается, если ввести локальную систему координат, в которой продольная ось берёт начало на левом крае i-го участка $x_i(0)=0$ и заканчивается при $x_i = l_i$. Тогда граничные условия конструкции будут соответствовать $x_1 = 0$ и $x_N = l_N$. Функции $\Psi(x)$ на каждом участке будут соответствовать функции $\Psi_i(x_i)$, которые должны удовлетворять условиям совместности деформаций соседних участков. Для уравнения (1) таких условий будет $2N$ штук:

$$\begin{aligned} \psi_i(l_i) &= \psi_{i+1}(0); \quad \psi'_i(l_i) = \psi'_{i+1}(0); \\ \psi''_i(l_i) &= \psi''_{i+1}(0); \quad \psi'''_i(l_i) = \psi'''_{i+1}(0). \end{aligned} \tag{7}$$

Уравнения (7) совместно с четырьмя граничными условиями дают систему уравнений, содержащую искомый параметр. Для нетривиальности её решения определитель системы должен быть равен нулю.

Пример. Найдем собственные частоты поперечных колебаний конструкции из двух стержней ($i = 1; 2$). Из (6) находим

$$\alpha_2 = \alpha_1 \lambda \gamma; \ \lambda = \frac{l_2}{l_1}; \ \gamma = \sqrt[4]{\left(\frac{EI}{m}\right)_1 \left(\frac{m}{EI}\right)_2}.$$

Пусть края конструкции шарнирно оперты:

$$\psi_1(0) = 0; \ \ \psi_1''(0) = 0; \ \ \psi_2(l_2) = 0; \ \ \psi_2''(l_2) = 0. \qquad (8)$$

Решение (1) запишем в функциях Крылова

$$\psi_i(x_i) = A_i S_i(x_i) + B_i T_i(x_i) + C_i U_i(x_i) + D_i V_i(x_i). \qquad (9)$$

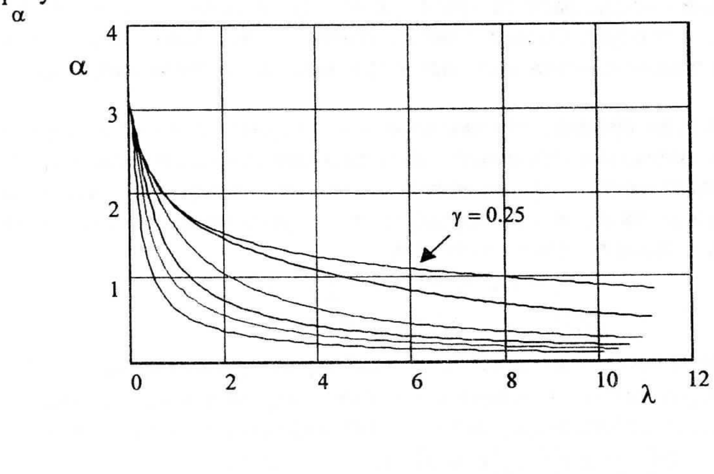
Уравнения (7), (8) с учётом (9) дают систему уравнений, с определителем

$$\begin{vmatrix} T_1 & V_1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ S_1 & U_1 & 0 & -\gamma & 0 & 0 \\ V_1 & T_1 & 0 & 0 & -\gamma^2 & 0 \\ U_1 & S_1 & 0 & 0 & 0 & -\gamma^3 \\ 0 & 0 & S_2 & T_2 & U_2 & V_2 \\ 0 & 0 & U_2 & V_2 & S_2 & T_2 \end{vmatrix} = 0, \qquad (10)$$

где функции Крылова в сечениях $x_i = l_i$ ($\alpha_i = k_i l_i$) имеют вид

$$T = \tfrac{1}{2}(\text{sh}\alpha + \sin\alpha); V = \tfrac{1}{2}(\text{sh}\alpha - \sin\alpha); S = \tfrac{1}{2}(\text{ch}\alpha + \cos\alpha); U = \tfrac{1}{2}(\text{ch}\alpha - \cos\alpha).$$

Численное решение уравнения (10) даёт зависимость $\alpha_1 = \alpha_1(\lambda, \gamma)$, которая для первых корней уравнения при $\gamma = 0.25; 0.5; 1.0; 1.5; 2.0; 3.0$ представлена на рисунке.



Аналогичные зависимости получены для первых четырех корней систем с другими граничными условиями, которые при известных λ и γ позволяют найти α_1 и по формулам (4) - собственные частоты. Из этих зависимостей следуют, как частные случаи классические значения λ. Для рассмотренного примера $\alpha_s = s\pi$ $(s = \overline{1...4})$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бабаков И.М.* Теория колебаний. М.:Наука, 1965.

2. *Антоненко Э.В.* Свободные колебания и устойчивость оболочек с упругими краевыми ребрами // Прикл. механика. 1975. Т. IV, вып. 6. С. 44-50.

3. *Кан С.Н.* Строительная механика оболочек. М.:Машиностроение, 1966.

УДК 533.6.011/533.625/661.013

В. В. Безлюдный, В. В. Мозжилкин

РАСЧЕТ СВЕРХЗВУКОВОГО ОБТЕКАНИЯ ГАРМОНИЧЕСКИ КОЛЕБЛЮЩИХСЯ ТЕЛ

В настоящее время для расчета нестационарных аэродинамических характеристик летательных аппаратов (ЛА) широко используется линейная теория [1]. Однако, при сверхзвуковых скоростях полета в силу возникновения ударных волн, их взаимодействия друг с другом, точность таких результатов может быть невысокой.

Численные методы расчета трехмерных неустановившихся течений в настоящее время требуют больших вычислительных ресурсов и поэтому не могут широко использоваться для параметрического исследования характеристик ЛА.

В связи с этим предлагается численный метод расчета нестационарного сверхзвукового обтекания тел, основанный на линеаризации трехмерных неустановившихся течений в предположении, что тело совершает малые гармонические колебания около некоторого среднего положения, то есть его поверхность можно представить уравнением:

$$z = F(x, y, t) = f_0(x, y) + f_\omega(x, y)e^{i\omega t} \qquad (1)$$
$$|f_\omega| << f_0, \quad Sh = \omega L / V_\infty << 1.$$

Здесь ω- круговая частота колебаний; L- характерный размер тела; V_∞ - скорость набегающего потока. Система координат выбрана таким образом, что ось oX параллельна набегающему потоку. Представляя решение в виде

$$U(x, y, z, t) = U_0(x, y, z) + U_\omega(x, y, z)e^{i\omega t}, \qquad (2)$$