УДК 532.546

Н. Г. Больман, А. И. Сафрончик

О ВЛИЯНИИ ШПУНТОВОЙ ЗАВЕСЫ НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДАВЛЕНИЯ В ОСНОВАНИИ ПЕРЕМЫЧКИ И ПОДТОПЛЕНИЕ ТЕРРИТОРИИ, ПРИМЫКАЮЩЕЙ К ВОДОЁМУ

Рассматривается задача о подтоплении территории, отделённой от водоёма непроницаемой дамбой, усиленной шпунтовой крепью. Предполагается, что дамба имеет конечную ширину и достаточно большую протяжённость. Элементы системы покоятся на водонасыщенном пористом основании достаточно большой мощности. Фильтрационное течение рассматривается лишь в пористом основании, а в водоёме и грунтовом массиве около дамбы давление считается, ввиду малых скоростей, гидростатическим. При сделанных предположениях течение можно рассматривать как плоскопараллельное. Предполагается, что отсчёт давления ведётся от начального гидростатического распределения, водоём в начальный момент пуст, и идёт его заполнение. Математическая задача сводится к решению уравнения В.Н. Щелкачёва.

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \kappa\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right) \quad (-\infty < x < \infty,\ 0 < z < \infty,\ t > 0) \tag{1}$$

при условиях

$$U(x, z, 0) = 0 \quad (-\infty < x < \infty) \tag{2}$$

$$U(+\infty, z, t) = \gamma \int_0^t \dot{H}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{\kappa(t-\tau)}}\right) d\tau \tag{3}$$

$$U(-\infty, z, t) = 0, \quad u(x, \infty, t) = 0 \tag{4}$$

$$U(x, 0, t) = \begin{cases} \gamma H(t) & 0 < x < \infty \\ \gamma h(x, t) & -\infty < x < -b \end{cases} \tag{5}$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_0 = \begin{cases} -\dfrac{\mu}{k}\dfrac{m\,\partial h(x, t)}{\partial t} & -\infty < x < -b \\ 0 & -b < x < 0 \end{cases} \tag{6}$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{x \to 0} = 0 \quad 0 < z < a. \tag{7}$$

Здесь ρ, μ, β - плотность, динамическая вязкость и коэффициент объёмной упругости воды, $\kappa = \dfrac{k}{\mu(m\beta + \alpha)}$ - коэффициент пьезопроводности, а α и m – объёмная упругость среды и пористость. В грунтовом массиве $\{-\infty < x < -b,\ 0 < z < h(x, t)\}$ течение не рассматривается, и все условия снесены на поверхность $z = 0$. $H(t)$ – текущий уровень воды в водоёме. Аналогичная задача при исчезающе малой ширине дамбы решалась в работе [1].

Решение задачи (1) – (7) можно записать как комбинацию тепловых потенциалов, мощности источников которых определяются из граничных условий.

$$U(x,z,t)=\begin{cases} \gamma\int\limits_0^t \dot{H}\,\mathrm{erfc}\left(\dfrac{z}{2\sqrt{\kappa(t-\tau)}}\right)d\tau-\dfrac{\mu}{2\pi k}\int\limits_0^t\dfrac{\exp\left\{-\dfrac{x^2}{4\kappa(t-\tau)}\right\}d\tau}{t-\tau}\int\limits_a^\infty Q(\eta,\tau)\times \\ \times\left[\exp\{-\dfrac{(z-\eta)^2}{4\kappa(t-\tau)}\}-\exp\{-\dfrac{(z+\eta)^2}{4\kappa(t-\tau)}\}\right]d\eta \quad 0<x<\infty \\ \dfrac{\mu}{2\pi k}\int\limits_0^t\dfrac{\exp\{-\dfrac{x^2}{4\kappa(t-\tau)}\}}{t-\tau}d\tau\int\limits_a^\infty Q(\eta,\tau)[\exp\{-\dfrac{(z-\eta)^2}{4\kappa(t-\tau)}\}+ \\ +\exp\{-\dfrac{(z+\eta)^2}{4\kappa(t-\tau)}\}]d\eta-\dfrac{\mu\, m}{2\pi k}\cdot\int\limits_0^t\dfrac{\exp\{-\dfrac{z^2}{4\kappa(t-\tau)}\}}{t-\tau}d\tau\cdot \\ \cdot\int\limits_{-\infty}^{-b}\dfrac{\partial h(\xi,\tau)}{\partial\tau}[\exp\{-\dfrac{(x-\xi)^2}{4\kappa(t-\tau)}\}+\exp\{-\dfrac{(x+\xi)^2}{4\kappa(t-\tau)}\}]d\xi \quad -\infty<x<\infty. \end{cases}$$

Здесь $Q(z,t)$ - плотность расхода воды под шпунтовой завесой. Удовлетворив условиям (4) – (7), получим два уравнения для функций $Q(z,t)$ и $h(x,t)$, которые в изображениях (преобразование Лапласа-Карсона по переменной t) приобретают вид $(a<z<\infty)$

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_a^\infty \overline{Q}(\eta,s)K_0|z-\eta|\beta d\eta-\frac{2ms}{\pi}\int\limits_b^\infty \overline{h}(-\xi,s)K_0\left(\beta\sqrt{z^2+\xi^2}\right)d\xi=K\overline{H}(s)\exp(-\beta z) \quad (8)$$

$$\overline{h}(-x,s)+\frac{ms}{\pi K}\int\limits_b^\infty \overline{h}(-\xi,s)[K_0(|x-\xi|\beta)+K_0(x+\xi)\beta]d\xi=$$

$$=\frac{2}{\pi K}\int\limits_a^\infty \overline{Q}(\eta,s)K_0\left(\beta\sqrt{x^2+\eta^2}\right)d\eta \quad (0<x<\infty). \qquad (9)$$

Здесь $K=\dfrac{k\gamma}{\mu}$ - коэффициент фильтрации, $\beta=\sqrt{\dfrac{s}{\kappa}}$, а $K_0(x)$ - функция Макдональда. В работе [1] построено точное решение уравнения (8).

$$\overline{Q}(z,s)=\frac{K\overline{H}(s)\sqrt{\frac{\beta}{2\pi}}\cdot e^{-\beta z}}{\sqrt{z-a}}+\frac{ms}{\pi\sqrt{2}}e^{-\beta z}\frac{d}{dz}\int_0^\infty \overline{h}(-\xi,s)d\xi\times$$

$$\times\int_a^\xi \exp\left(-\beta\left(\sqrt{y^2+\xi^2}-y\right)\right)\left(\frac{\sqrt{y^2+\xi^2}+y}{(x-y)\left(y^2+\xi^2\right)}\right)^{1/2}dy. \qquad (10)$$

Учитывая слабую сжимаемость воды $(\kappa\to\infty)$, из (10) получим

$$\overline{Q}(z,s)\approx\frac{\exp(-\beta z)}{\sqrt{z-a}}\{K\overline{H}(s)\sqrt{\frac{\beta}{2\pi}}+\frac{ms}{\pi\sqrt{2}}\int_b^\infty \overline{h}(-\xi,s)[\xi\left(\sqrt{a^2+\xi^2}-a\right)^{1/2}+$$

$$+z\left(\sqrt{a^2+\xi^2}+a\right)^{1/2}]d\xi\}. \qquad (11)$$

Решение системы уравнений (9) и (11) ищется в виде степенных рядов

$$\overline{Q}(z,x)=\sum_{k=0}^{\infty}\overline{Q}_n(z,s)m^n,\quad \overline{h}(-x,s)=\sum_{k=0}^{\infty}\overline{h}_n(-x,s)m^n.$$

Для всех $n=0,1,2,\ldots$ получаем систему рекуррентных соотношений

$$\overline{Q}_n(z,s)=\left(A_{n-1}+B_{n-1}z\right)\frac{s\exp(-\beta z)}{\pi\sqrt{2(z-a)}}.$$

$$\overline{h}_n(-x,s)=\frac{s\sqrt{2}}{\pi^2 K}\int_a^\infty (A_{n-1}+B_{n-1}\eta)\frac{\exp(-\beta\eta)}{(\eta-a)^{1/2}}K_0\left(\beta\sqrt{x^2+\eta^2}\right)d\eta-$$

$$-\frac{s}{K\pi}\int_b^\infty \overline{h}_{n-1}(-\xi,s)[K_0|x-\xi|\beta+K_0(x+\xi)\beta]d\xi,$$

$$A_n=\int_b^\infty \xi\overline{h}_n(-\xi,s)\left(\sqrt{a^3+\xi^2}-a\right)^{1/2}d\xi,\quad B_n=\int_b^\infty \xi\overline{h}_n(-\xi,s)\left(\sqrt{a^3+\xi^2}-a\right)^{-1/2}d\xi.$$

Было вычислено нулевое и первое приближение аналогично [1] и выполнено его обращение. Вычислив значение $\overline{U}(x,0,s)$ в области $-b<x<0$, найдём распределение давления в основании дамбы. Ввиду громоздкости полученные формулы не приводятся.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Больман Н.Г., Сафрончик А.И.* Неустановившаяся фильтрация из канала с непроницаемыми стенками и шпунтовой крепью // Аэродинамика. Саратов :Изд – во Сарат. ун – та, 1997. С. 131 - 140.