УДК 629

Я. Г. Сапунков

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ КВАТЕРНИОННЫМИ И КЛАССИЧЕСКИМИ ЭЛЕМЕНТАМИ ОРБИТЫ[1]

В статье выводятся соотношения, связывающие между собой классические элементы орбиты (a - большая полуось, e - эксцентриситет, i - наклон орбиты, Ω - долгота восходящего узла, ω - угловое расстояние перицентра от узла) и кватернионные [1] или векторные [2] элементы орбиты для возмущённого движения по траектории эллиптического типа.

1. Для регуляризации уравнений движения точки массы m под действием силы гравитационного притяжения к центру с массой M (полагается $M>>m$) и управляющей или возмущающей силы $m\boldsymbol{p}$ используются переменные Кустаанхеймо-Штифеля (KS-переменные) $\boldsymbol{u} = (u_0, u_1, u_2, u_3)$, $\boldsymbol{s} = (s_0, s_1, s_2, s_3)$, которые связаны с радиусом вектором точки $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ и её вектором скорости $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ соотношениями [2, 3]:

$$\boldsymbol{x} = P^T(\boldsymbol{u})\,\boldsymbol{u}\,, \quad \boldsymbol{v} = 2r^{-1}P^T(\boldsymbol{u})\,\boldsymbol{s}\,, \quad r = |\boldsymbol{x}| = u^2\,, \tag{1.1}$$

$$P^T(\boldsymbol{u}) = \begin{Vmatrix} u_0 & u_1 & -u_2 & -u_3 \\ -u_3 & u_2 & u_1 & -u_0 \\ u_2 & u_3 & u_0 & u_1 \end{Vmatrix}.$$

Векторные или кватернионные элементы орбиты $\boldsymbol{A} = (A_0, A_1, A_2, A_3)$, $\boldsymbol{B} = (B_0, B_1, B_2, B_3)$ в случае движения точки по траектории эллиптического типа, когда полная энергия единицы массы $h = 0.5v^2 - \gamma M r^{-1} < 0$, ($\gamma$ - гравитационная постоянная), связаны с KS-переменными соотношениями [2]

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{A}\cos\varphi + \boldsymbol{B}\sin\varphi\,,$$
$$\boldsymbol{s} = (-\boldsymbol{A}\sin\varphi + \boldsymbol{B}\cos\varphi)(0.5\gamma M Q^{-1})^{1/2}\,, \quad Q = A^2 + B^2\,, \tag{1.2}$$

где 2φ - обобщённая эксцентрическая аномалия. В случае отсутствия возмущений ($\boldsymbol{p} \equiv 0$) $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ сохраняют постоянные значения. Если управляющие или возмущающие силы малы по сравнению с силами гравитационного притяжения к центру, то векторные элементы орбиты оказываются медленно изменяющимися переменными. Это позволяет уменьшить объём вычислений при решении задач управления с использованием векторных элементов орбиты.

2. По положению и скорости точки можно определить оскулирующую орбиту, по которой двигалась бы точка только под действием силы притяжения к центру. В работе [2] имеются соотношения, которые связывают KS-

[1] Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, коды проектов 96-01-01251 и 99-01-00192.

переменные с классическими элементами орбиты. Используя эти соотношения, можно получить формулы для определения большой полуоси и эксцентриситета через векторные элементы орбиты

$$a = 0.5Q, \quad e = [\,(A^2 - B^2)^2 + 4(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})^2\,]^{1/2} Q^{-1}. \qquad (2.1)$$

Трёхмерные вектора $\boldsymbol{V}, \boldsymbol{U}, \boldsymbol{W}$ вводятся соотношениями

$$\boldsymbol{V} = P^T(\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{U} = P^T(\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}, \quad \boldsymbol{W} = P^T(\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}. \qquad (2.2)$$

Единичные вектора $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$, расположенные в плоскости оскулирующей орбиты, среди которых $\boldsymbol{C}$ направлен на перицентр орбиты, а $\boldsymbol{D}$ - по вектору скорости, которую имела бы точка, находясь в перицентре, определяются по формулам

$$\boldsymbol{C} = -\frac{1}{2ae}(\boldsymbol{V} + \boldsymbol{U}),$$

$$\boldsymbol{D} = \frac{1}{2a^2 e\sqrt{1-e^2}}[\,(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})(\boldsymbol{V} - \boldsymbol{U}) - (A^2 - B^2)\boldsymbol{W}\,]. \qquad (2.3)$$

Координаты векторов **C** и $\boldsymbol{D}$ связаны с угловыми элементами орбиты соотношениями [2]

$$C_1 = \cos\Omega\cos\omega - \sin\Omega\sin\omega\cos i,$$

$$C_2 = \sin\Omega\cos\omega + \cos\Omega\sin\omega\cos i, \qquad C_3 = \sin\omega\sin i,$$

$$D_1 = -\cos\Omega\sin\omega - \sin\Omega\cos\omega\cos i, \qquad (2.4)$$

$$D_2 = -\sin\Omega\sin\omega + \cos\Omega\cos\omega\cos i, \qquad D_3 = \cos\omega\sin i.$$

Если оскулирующая орбита является круговой, то согласно (2.1)

$$e = 0, \; a = A^2 = B^2, \; (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = 0. \qquad (2.5)$$

В этом случае единичный вектор $\boldsymbol{K}$, перпендикулярный к плоскости орбиты, определяется векторным произведением

$$\boldsymbol{K} = [\,\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}\,]\,a^{-2}. \qquad (2.6)$$

Координаты вектора $\boldsymbol{K}$ связаны с угловыми элементами орбиты i и Ω соотношениями

$$K_1 = \sin i\sin\Omega, \; K_2 = -\sin i\cos\Omega, \; K_3 = \cos i. \qquad (2.7)$$

3. Если ввести мнимые единицы Гамильтона $\boldsymbol{j}_1, \boldsymbol{j}_2, \boldsymbol{j}_3$, то все четырёхмерные вектора можно интерпретировать как кватернионы. В частности, кватернионный элемент орбиты $\boldsymbol{A}$ и сопряжённый к нему кватернион $\overline{\boldsymbol{A}}$ будут иметь вид

$$\boldsymbol{A} = A_0 + \boldsymbol{j}_1 A_1 + \boldsymbol{j}_2 A_2 + \boldsymbol{j}_3 A_3, \quad \overline{\boldsymbol{A}} = A_0 - \boldsymbol{j}_1 A_1 - \boldsymbol{j}_2 A_2 - \boldsymbol{j}_3 A_3. \qquad (3.1)$$

Трёхмерные вектора можно интерпретировать как кватернионы с нулевой скалярной частью. Тогда всё содержание п.п. 1 и 2 можно изложить с использованием кватернионов и операций над ними. Кватернионы $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{W}$ можно представить в виде

$$\boldsymbol{V} = \overline{\boldsymbol{A}} \bullet \boldsymbol{j}_1 \bullet \boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{U} = \overline{\boldsymbol{B}} \bullet \boldsymbol{j}_1 \bullet \boldsymbol{B}, \quad \boldsymbol{W} = \overline{\boldsymbol{A}} \bullet \boldsymbol{j}_1 \bullet \boldsymbol{B}, \qquad (3.2)$$

где символ • обозначает кватернионное умножение. Кватернион $\boldsymbol{K}$ и скалярное произведение векторов $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ можно представить в виде

$$\boldsymbol{K} = \mathrm{vect}(\boldsymbol{V} \bullet \boldsymbol{W})\,a^{-2}, \; (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = \mathrm{scal}(\overline{\boldsymbol{A}} \bullet \boldsymbol{B}), \qquad (3.3)$$

где scal (...) и vect (...) - обозначают скалярную и векторную части кватерниона соответственно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Челноков Ю.Н.* Применение кватернионов в теории орбитального движения искусственного спутника. I, II // Космические исследования. 1992. Т. 30, вып. 6. С. 759 - 770; 1993. Т. 31, вып. 3. С. 3 - 15.
2. *Stiefel E.L., Scheifele G.* Linear and Regular Celestial Mechanics. Berlin : Springer, 1971.
3. *Сапунков Я.Г.* Применение KS-переменных к задаче оптимального управления космическим аппаратом // Космические исследования. 1996. Т. 34, вып. 4. С. 428 - 433.

УДК 301.51.17.07.05

О. М. Сапункова

ПРИМЕР МГД-ТЕЧЕНИЯ С ДВУМЯ ХАРАКТЕРНЫМИ СКОРОСТЯМИ

1. Пусть две плоские струи идеальной плазмы с общей линией симметрии *Ox* движутся навстречу друг другу в магнитном поле, силовые линии которого параллельны линиям тока.

Считается, что движение установившееся, адиабатическое, внешнее электрическое поле отсутствует, энтропия постоянна во всём потоке. Для магнитного поля выполняется условие $\mathrm{rot}[\boldsymbol{v}(1-s)] = 0$, где $\boldsymbol{v}$ - вектор скорости плазмы,

$$s = s_0(1-\tau)^{\beta} \qquad (1)$$

- число Альвена,

$$s_0 = \mu\kappa^2\rho_0 \ , \qquad (2)$$

μ-магнитная проницаемость, $\kappa = H/(\rho v) = \mathrm{const}$, H - напряжённость магнитного поля, ρ - плотность, ρ_0 - плотность в точке остановки, $\tau = (v/v_{\max})^2$, $v_{\max}$- максимальная скорость, $\beta = (\gamma-1)^{-1}$, γ - показатель адиабаты.

Если $s_0 \le 1$, то рассматриваются дозвуковые струи, а при $s_0 > 1$ рассматриваются струи с догиперкритическими скоростями.

Вдоль оси *Ox* слева направо движется струя плазмы, которая на бесконечности имеет ширину $2h_1$, скорость V_1, плотность ρ_1, а справа налево движется струя плазмы с соответствующими значениями $2h_2$, V_2, ρ_2 на бесконечности. После соударения образуются две симметричные струи, направления которых в бесконечности составляют углы $\pm\theta_0$ с осью *Ox*. Значение θ_0 определяется из уравнения импульсов: