$$\tau(1-\tau)(1-s)\frac{d\Delta_{n/2}(\tau)}{d\tau}+\beta\tau\Delta_{n/2}(\tau)+\frac{n}{2}\left[(1-\tau)(1-s)+2\beta s\tau\right]\Delta_{n/2}^{2}(\tau)=$$

$$=\frac{n}{2}\left[1-\tau(2\beta+1)\right](1-s). \qquad (20)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фалькович С.В., Сапункова О.М.* Уравнение типа Чаплыгина в магнитной газодинамике //Изв. вузов. Сер. математика. 1969. Вып. 6. С.78 - 85.

УДК 533.6.011

Г. Д. Севостьянов

ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ, НЕПРЕРЫВНЫЕ ЧЕРЕЗ ОКОЛОЗВУКОВОЙ СКАЧОК УПЛОТНЕНИЯ

Уравнения Фальковича-Кармана для двумерных безвихревых околозвуковых течений идеального газа [1] (ω=0 и ω=1 соответственно для плоского и осесимметричного течений)

$$uu_x=v_y+\omega\frac{v}{y},\quad v_x=u_y \qquad (1)$$

на скачке уплотнения $x=h(y)$ задают два условия [1]

$$h'(y)=-\frac{[v]}{[u]}=-\frac{[u^2/2]}{[v]}, \qquad (2)$$

где $[f]$ – разность значений функции f на сторонах скачка. Для однопараметрических решений (u, v, x – функции y и параметра p; $x_p\neq 0$) приведём (1), (2) к дивергентной форме

$$\left(y^{\omega}C_*\right)_p=\left(y^{\omega}x_p v\right)_y,\quad C_{**p}=\left(x_p u\right)_y,$$

$$C_*=\frac{u^2}{2}+x_y v,\quad C_{**}=v+x_y u \qquad (3)$$

и условиям на скачке

$$\left(\frac{dp}{dy}\right)_{sh}=-\frac{[C_{**}]}{[x_p u]}=-\frac{[C_*]}{[x_p v]}.$$

В случае изопараметрического скачка (dp = 0 вдоль него) функции $C_*(p,y)$ и $C_{**}(p,y)$ непрерывны всюду (и через скачок). Структурная функция $S(p, y)$ вводится [2] структурной формулой $u=Sx_p+x_y^2$, при этом $x_p^2S^2=C_{***}$ - непрерывная всюду функция. Свойство непрерывности

C_*, C_{**}, C_{***} подтверждается на примерах О.С. Рыжова (1967) и автора (1969) для параболического и кубического скачка соответственно.

Для автомодельных решений (1) с показателем n

$$x = py^n,\ u = y^{2n-2}F(p),\ v = y^{3n-3}G(p),$$
$$S = y^{n-2}s(p),\ s(p) = F - n^2p^2,\ \sigma = s^2(p)$$

функции C_*, C_{**}, C_{***} имеют вид

$$C_* = y^{4n-4}c_*(p),\ C_{**} = y^{3n-3}c_{**}(p),\ C_{***} = y^{4n-4}\sigma(p),$$
$$c_* = \frac{F^2}{2} + npG,\ c_{**} = G + npF,\ c_*' = (4n-3+\omega)G,\quad c_{**}' = (3n-2)F.$$

Они непрерывны через изопараметрический скачок; иногда всюду постоянны: c_* при $n = (3-\omega)/4$; c_{**} при $n = 2/3$. При $\omega = 0$ и $n = 1/2$ постоянна функция $c_* + pc_{**}$. Непрерывная всюду функция $\sigma(p)$ выражается через c_* и c_{**} : $s^2 = \sigma = n^4p^4 + 2(c_* - npc_{**})$ и удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению (ОДУ) 2 порядка. F и G выражаются через разрывную на скачке функцию $s(p)$. Сделан расчёт функций c_*, c_{**}, σ для случаев ($\omega = 0$, $n = 4/5$) и ($\omega = 1$, $n = 4/7$) со скачком при звуковом обтекании тел. Недивергентная форма (1) для однопараметрических решений [2]

$$y^\omega(Su_p + x_yu_y) = (y^\omega v)_y,\quad x_pu_y - x_yu_p = v_p,$$
$$\left[y^\omega(Su_p + x_yu_y)\right]\Big|_p = \left[y^\omega(x_pu_y - x_yu_p)\right]\Big|_y, \tag{4}$$
$$u = Sx_p + x_y^2$$

имеет в B-подклассе решения со звуковой свободной границей ($\omega = 0$)

$$S = y,\quad x = a_0(p) + a_3(p)y^3$$
$$u = \omega_1(p)y + \omega_4(p)y^4;\quad \omega_1 = a_0', \tag{5}$$
$$\omega_4 = a_3' + 9a_3^2,$$

где коэффициенты функции $x(p, y)$ удовлетворяют ОДУ

$$a_3''' + 48a_3a_3'' + 6a_3'^2 + 432a_3^2a_3' = 0$$
$$a_0''' + 12a_3a_0'' - 12(a_3' + 9a_3^2)a_0' = 0. \tag{6}$$

Первое ОДУ приведём [2] к уравнению Абеля второго рода

$$a_3' = a_3^2\tau(\eta),\quad \eta = \ln|a_3|,\quad q(\tau) = \tau'(\eta)$$
$$q\tau\frac{dq}{d\tau} = -\chi(\tau, q),\quad \chi(\tau, q) = q^2 + 7\tau q + 48q + 6(\tau+8)(\tau+9). \tag{7}$$

В особой точке $M_1(-8, 0)$ (седло): $\tau = -8$, $a_3 = 1/(8p)$, $a_0 = c_1p^{1/4} + c_2p^{5/4}$, $\omega_4 = 1/(64p^2)$, $\omega_1 = a_0'$ решение u имеет два автомодельных решения ($n = 5/3$ при $c_1 = 0$; $n = 3/5$ при $c_2 = 0$) и описывает трансзвуковое течение: звуковая свободная струя натекает на край заслонки, за которой имеется субкритическое давление.

В особой точке $M_2(-9, 0)$(узел): $\tau = -9$, $a_3 = 1/(9p)$, $a_0 = c_1 p^{2/3} + c_2 p$, $\omega_4 = 0$, $\omega_1 = a_0'$ решение имеет два автомодельных решения (n = 3/2 при $c_1 = 0$; n = 6/5 при $c_2 = 0$) и описывает течение, когда в звуковую свободную границу струи параллельно ей помещён профиль.

Точки $M_3(0, -12)$(узел) и $M_4(0, -36)$(седло) приводят к решению [1] автора (a_3 постоянна; $\omega_4 = 9a_3^2$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Севостьянов Г.Д.* Основы теории околозвуковых течений газа. Саратов :Изд-во Сарат. ун-та, 1987.

2. *Севостьянов Г.Д.* Структура элементарных околозвуковых решений // Аэродинамика. Саратов :Изд-во Сарат. ун-та, 1997. Вып. 14(17). С. 109-117.

УДК 533.6.011

И. А. Чернов

P-РЕШЕНИЯ ТРАНСЗВУКОВЫХ УРАВНЕНИЙ АЭРОДИНАМИКИ

Построены новые частные решения трансзвуковых уравнений газовой динамики двумерных течений, которые представляются в параметрической форме: как искомые, так и независимые переменные записываются в виде полиномов по параметру с коэффициентами, зависящими от второго параметра. Для коэффициентов получаются системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), которые приводятся к нормальному виду.

Трансзвуковая система уравнений в плоском случае имеет вид

$$u u_x - v_y = 0, \quad u_y - v_x = 0. \tag{1}$$

Здесь *u*, *v* приведённые компоненты скорости, *x, y* - декартовы координаты.

Обсуждаемый метод заключается в представлении *u, v, x, y* в виде полиномов [1]

$$(u, v, x, y) = \sum_{i=0}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta} (u_i(s), v_i(s), x_i(s), y_i(s)) \cdot t^i . \tag{2}$$

Подстановка (2) в (1) даёт систему ОДУ. Интересны такие $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, которые приводят к совместным системам.

Система (1) допускает класс автомодельных решений вида