УДК 519.21

И. А. Батраева

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ СЛОВАРНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ, НЕПРЕДСТАВИМЫХ КОНЕЧНЫМИ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫМИ АВТОМАТАМИ

Рассмотрим класс словарных отображений $\varphi : X^* \to Y^*$. Этот класс разделяется на два подкласса: класс конечно-автоматных отображений и класс неавтоматных отображений. В соответствии с этим разделением в теории автоматов выделяются два подхода к изучению поведения автоматов - 1) изучение свойств отображений, представимых конечными автоматами, 2) изучение свойств отображений, непредставимых конечными автоматами (другими словами, это изучение того, какие пары вход-выходных слов не представимы автоматами).

Автоматные отображения задаются инициальными конечными детерминированными автоматами (КДА) вида $A=(S,X,Y,\delta,\lambda,s_0)$ (или (A,s_0)), где $|S|=n$, $|X|=m$, $|Y|=k$. Инициальный автомат (A,s_0) задает отображение $\varphi_{(A,s_0)} = \{(p,q) \mid p \in X^* \& q \in Y^* \& |p|=|q| \& \lambda(s_0,p)=q\}$. Автомат A задает автоматное отношение $\Phi_A = \bigcup_{s \in S} \varphi_{(A,s)}$. Будем обозначать класс инициальных КДА с n состояниями, m входными, k выходными сигналами как $K_{in}(n,m,k)$, и соответственно через $K(n,m,k)$ класс неинициальных КДА. Классу автоматов K соответствует класс отношений $\Phi_K = \{\Phi_A \mid A \in K\}$.

Для классов инициальных автоматов строится иерархия по числу состояний. Этой иерархии будет соответствовать некоторая иерархия классов автоматных отношений, определяемая следующим соотношением:

$$\Phi_{K_{in}(n,m,k)} \subset \Phi_{K_{in}(n+1,m,k)}.$$

При рассмотрении иерархии по состояниям для КДА существенным становится вопрос об определении для заданного произвольного класса автоматов $K(r,m,k)$ является ли он классом $K(n,m,k)$.

Условие отделимости классов определяется следующей теоремой:

ТЕОРЕМА 1 (необходимое и достаточное условие отделимости классов автоматов).

Класс автоматов $K(r,m,k)$, задающий класс автоматных отношений $\Phi_{K(r,m,k)}$, будет классом $K(n,m,k)$ тогда и только тогда, когда выполняется

$$(\forall x \in X)(\forall y, q \in Y, y \neq q)(x^n, y^{n-1}q) \in \Phi_{K(r,m,k)} \& (x^{n+1}, y^n q) \notin \Phi_{K(r,m,k)}.$$

Доказательство. По определению класса $K(n,m,k)$ найдется автомат A, у которого

$$(\exists x \in X)(\forall s_i, i = \overline{1, n-1})\delta(s_i, x) = s_{i+1} \& \lambda(s_i, x) = y \& \lambda(s_n, x) = q,$$

то есть граф автономного подавтомата A_x - это цепь длины n, и, следовательно, для входного слова x^n выходная реакция будет $y^{n-1}q$.

Предположим, что на входное слово x^{n+1} некоторый автомат A_x допускает выходное слово $y^n q$. По определению автономного автомата его граф это либо цикл длины n, либо цепь, заканчивающаяся циклом. Очевидно, что в обоих случаях автомат на $n+1$ такте перейдет в одно из пройденных состояний, и, следовательно, на выходе должен появиться входной символ, уже встречавшийся ранее, что противоречит предположению, так как $y \neq q$ по условию. Так как автомат A произвольный, то пара $(x^{n+1}, y^n q)$ непредставима всеми автоматами данного класса.

Следствие. $(\forall n, m, k \in N)(\forall x \in X)(\forall y, q \in Y, y \neq q)(x^{n+1}, y^n q) \notin \Phi_{K(n,m,k)}$.

Рассмотрим вопрос о виде нереализуемых автоматами вход-выходных пар. Введем следующие обозначения: p - периодическое входное слово, p_0 - его период, т.е. $p = p_0^j$, q - периодическое выходное слово, q_0 - его период, т. е. $q = q_0^j$. Слово p будем называть квазипериодическим, если его можно представить в виде $p = p_0 v p_0$, где $p_0, v \in X^*$ и $v \neq p_0$.

В монографии [1] введен граф $\Gamma_A(p) = (S, \varphi)$, где $(s, s') \in \varphi$ тогда и только тогда, когда $\delta(s, p) = s'$. Показано, что если на вход автомата подавать периодическую входную последовательность, то, начиная с некоторого символа, выходная последовательность также становится периодической.

Исследуем вопрос об условиях периодизации выходного слова и вид нереализуемых связей между периодическим словом на входе и выходными словами.

ЛЕММА 1. Пусть на вход автомата $A \in K(n,m,k)$ подается слово $w = upv$, где $p, u, v \in X^*$, $p = p_0^i$, $i \geq n$. Тогда на выходе автомата A будет получено слово $w' = u'q'qv'$, где $u', q', q, v' \in Y^*$, $|u'| = |u|$, $|v'| = |v|$, $|q'| + |q| = |p|$, $q = q_0^j$, $j \leq n$, и для q', q, q_0 выполняются следующие соотношения:

1) $|q'| \leq (n-1)|p_0|$,

2) $|q_0|=\nu|p|$, где $\nu = \dfrac{n|p_0|-|q'|}{|p_0|}$,

$$q=\lambda\big(\delta(s_0, pr_{1\ldots|q|}p), p_0\big)\lambda\big(\delta(s_0, pr_{1\ldots|q|+|p_0|}p), p_0\big)\ldots\lambda\big(\delta(s_0, pr_{1\ldots|q|+(\nu-1)|p_0|}p), p_0\big),$$

3) $q = q_o^{\frac{|p|-|q'|}{|q_0|}}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для автомата A и произвольного входного слова p_0 строится в соответствии с [1] граф $\Gamma_A(p_0)$. По теореме 23 [1] о свойствах графа $\Gamma_A(p_0)$ граф $\Gamma_A(p_0)$ это либо цикл, либо цепь оканчивающаяся циклом. В выходном слове появляется периодическая часть после попадания в этот цикл. Тогда длина непериодической части q' выходного слова определяется длиной цепи, так как максимальная длина цепи будет n-1 (цикл вырождается в петлю), то $|q'|\le(n-1)|p_0|$. Периодом выходного слова будет выходная последовательность, получаемая внутри цикла в $\Gamma_A(p_0)$ в результате воздействия входного слова p_0. Поэтому длина слова-периода q_0 либо равна, либо кратна длине p_0. Соотношение 3 очевидно - если показатель степени дробный, то последний период в слове q не закончен.

Из определения графа $\Gamma_A(p)$ и теоремы 23[1] следует

ТЕОРЕМА 2. Для любого слова $p=p_0^i, i>n, p_0\in X^*$, нереализуемой является связь со словом $w\in Y^*$, $|w|=|p|$, если начиная с $(n-1)|p_0|+1$ символа слово w не становится периодическим, с периодом q_0, кратным p_0.

ТЕОРЕМА 3. Для любого слова $p=p_0x_{j_1}\ldots x_{j_\tau}p_0^i,\ i>1, \tau\in N,\ x_{j_\mu}\in X$, $\mu=\overline{1,\tau}$, связь со словом q является нереализуемой в классе $K(2,m,k)$, если слово q нельзя представить в одном из следующих видов:

1) $q=q_1y_{j_1}\ldots y_{j_\tau}q_1q_2^t,\ t\in\{i\text{-}1,(i\text{-}1)/2\}$, 2) $q=q_1y_{j_1}\ldots y_{j_\tau}q_2^t,\ t\in\{i, i/2\}$,

3) $q=q_2y_{j_1}\ldots y_{j_\tau}q_1q_2^t,\ t\in\{i\text{-}1,(i\text{-}1)/2\}$, 4) $q=q_2y_{j_1}\ldots y_{j_\tau}q_2^t,\ t\in\{i, i/2\}$,

где для 1) - 4) выполняется $|p_0|=|q_1|=|q_2|$, $y_{j_\mu}\in Y, \mu=\overline{1,\tau}$, и

$$x_{j_1},\ldots,x_{j_\tau}\in p_0 \Rightarrow (\forall 1\le r\le\tau)(\exists 1\le l\le|p_0|)(x_{j_r}=pr_lp_0 \,\&\, (y_{j_r}=pr_lq_1\vee y_{j_r}=pr_lq_2))$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство основано на том, что автомат с 2 состояниями после подачи на вход первого p_0 либо переходит в состояние, являющееся входом в петлю графа $\Gamma_A(p_0)$, либо движется по петле, либо проходит половину цикла $\Gamma_A(p_0)$, если цикл состоит из двух состояний. Далее анализируется поведение автомата (выходные сигналы) при подаче на вход подслова $x_{j_1}\ldots x_{j_\tau}$, на основании этого и определяется вид выходного слова.