2. *Esik Z., Imreh B.* Subdirectly irreducible commutative automata//Acta Cybernet. 1981. Vol. 5, № 3. P. 251 - 260.

3. *Esik Z., Imreh B.* Remarks on finite commutative automata// Acta Cybernet. 1981. Vol. 5, № 2. P. 143 - 146.

УДК 519.83

Ю. Н. Сердюкова

СИТУАЦИИ РАВНОВЕСИЯ ПО НЭШУ С ЗАДАННЫМИ СПЕКТРАМИ

I. Целью настоящей работы является нахождение необходимых, а также достаточных условий, при которых в игре с упорядоченными исходами существует ситуация равновесия по Нэшу с заданными спектрами. Для простоты изложения мы ограничимся случаем игры двух лиц. Такая игра задается в виде системы:

$$G = \langle X,\ Y, A,\ \omega_1,\ \omega_2,\ F \rangle,$$

где X – множество стратегий первого игрока, Y – множество стратегий второго игрока, A – множество исходов, ω_s - отношение порядка на множестве A, выражающее предпочтение игрока $s = 1, 2$, $F: X \times Y \to A$ - функция реализации.

Как известно [1] в играх с упорядоченными исходами принцип равновесия реализуется в смешанных стратегиях. Смешанное расширение игры G имеет вид

$$\overline{G} = \langle \overline{X}, \overline{Y}, \overline{A}, \overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \overline{F} \rangle,$$

где $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{A}$ - множества вероятностных мер на X, Y, A, соответственно, $\overline{F}$ определяется как продолжение F на множество $\overline{A}$ вероятностных мер на A.

В данной статье мы ограничимся случаем, когда множества стратегий X , Y игроков конечны. Полагаем $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, $Y = \{1, 2, \ldots, m\}$, $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. В этом случае $\overline{X}, \overline{Y}$ могут быть отождествлены с симплексами S_n, S_m соответствующей размерности; $\overline{A}$ отождествляется с множеством отображений $\mu : A \to [0, 1]$, удовлетворяющих условию

$$\mu(a) \geq 0, \quad \sum_{a \in A} \mu(a) = 1 .$$

Функция реализации F в смешанном расширении игры G определяется равенством:

$$\overline{F}(x, y)(a) = \sum_{F(i, j)=a} x_i\, y_j ,$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S_n$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m) \in S_m$.

Продолжение $\overline{\omega_s}$ порядка ω_s на множество A определяется здесь следующим образом:

$$\mu_1 \overset{\overline{\omega_s}}{\leq} \mu_2 \Leftrightarrow (\forall \varphi \in C_s)(\varphi, \mu_1) \leq (\varphi, \mu_2),$$

где C_s - некоторый конус изотонных отображений упорядоченного множества (A, ω_s) в $\mathbf{R}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) семейство C_s аппроксимирует порядок ω_s,

2) C_s содержит k линейно-независимых элементов ($k = |A|$),

3) C_s является конечно-порожденным.

В работе [1] показано, что при указанных условиях на конус в игре G существует ситуация равновесия, однако ситуаций равновесия по Нэшу может не быть.

В данной статье находится необходимое, а также некоторые достаточные условия существования ситуаций равновесия по Нэшу в смешанном расширении конечной игры G.

II. В этом пункте находятся условия, при которых в смешанном расширении игры G существуют ситуации равновесия по Нэшу, имеющие заданный спектр. Для формулировки этих условий нам потребуется ряд понятий и фактов, относящихся к матрицам, элементы которых являются элементами произвольного множества. Матрица M размера $n \times m$ над произвольным множеством A определяется как отображение

$$\lambda : \{1, 2, \ldots, n\} \times \{1, 2, \ldots, m\} \to A,$$

при этом $\lambda(i,j) = a_{i,j}$.

<u>Определение 1.</u> Матрица M размера $n \times m$ называется *сбалансированной*, если существуют вероятностные вектора

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S_n, \quad y = (y_1, y_2, \ldots, y_m) \in S_m,$$

такие, что для любых $i = 1, \ldots, n$ и $j = 1, \ldots, m$ выполняется равенство

$$\overline{F}(i, y) = \overline{F}(x, j).$$

<u>Определение 2.</u> Матрица M называется *однородной*, если множества элементов, составляющие каждую строку и столбец, совпадают.

<u>Определение 3.</u> Матрица M размерна $n \times n$ называется *обобщенным латинским квадратом* (ОЛК), если всякий ее элемент имеет один и тот же индекс встречаемости для каждой строки и каждого столбца (матрица называется *латинским квадратом*, если для всех элементов индекс встречаемости равен 1).

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Всякий ОЛК является сбалансированной матрицей.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Всякая сбалансированная матрица является однородной.

Замечание. Существуют сбалансированные матрицы, не являющиеся ОЛК в конечной игре G.

ТЕОРЕМА. Если (x^0, y^0) - ситуация равновесия по Нэшу в игре $\overline{G}$, то подматрица её матрицы исходов A, полученная ограничением на спектрах $Sp\,x^0$, $Sp\,y^0$ является сбалансированной.

Следствие. Если (x^0, y^0) - ситуация равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях в игре G, то подматрица матрицы A, полученная ограничением на спектрах ($Sp\,x^0$, $Sp\,y^0$), должна быть однородной.

Отсюда следует, что в конечной игре G ситуаций равновесия по Нэшу может не существовать. Например, если в игре G нет ситуаций равновесия в чистых стратегиях и нет нетривиальных однородных подматриц, то в ней ситуаций равновесия по Нэшу заведомо не будет.

Замечание. Указанное в теореме необходимое условие формулируется только в терминах функции реализации, поэтому оно относится ко всем играм с заданной реализационной структурой и не зависит от отношений порядка игроков.

III. Необходимым и достаточным условием того, чтобы ситуация (x^0, y^0) являлась ситуацией равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях в игре G, является выполнение для всех $i = 1,\ldots, n$, $j = 1,\ldots, m$ неравенств

$$\overline{F}(i, y^0) \overset{\overline{\omega_1}}{\leq} \overline{F}(x^0, y^0), \qquad \overline{F}(x^0, j) \overset{\overline{\omega_2}}{\leq} \overline{F}(x^0, y^0). \qquad (*)$$

Если матрица исходов A имеет сбалансированную подматрицу с балансовыми векторами $x^* = (x_1^*,\ldots, x_n^*)$ и $y^* = (y_1^*, \ldots, y_m^*)$, то для того, чтобы ситуация (x^*, y^*) являлась ситуацией равновесия по Нэшу, необходимо проверить выполнение неравенств (*) для $i \in Sp\,x^*$, $j \in Sp\,y^*$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Розен В.В.* Описание ситуаций равновесия в играх с упорядоченными исходами //Математика, механика, математическая кибернетика :Сб. науч. тр. Саратов :Изд - во Сарат. ун - та, 1999. С. 128 - 131.

УДК 519.21

Л. Б. Тяпаев

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПОВЕДЕНИЯ АВТОМАТОВ И ИХ НЕОТЛИЧИМОСТЬ

Рассмотрим задачу эквивалентности автоматов, используя их геометрическую модель поведения. Введем необходимые определения.

Автомат определяется как пятерка $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$, где S, X, Y - конечные непустые множества, называемые соответственно множеством состояний, множеством входных сигналов и множеством выходных сигналов