УДК 519.853+517.518.82

Д. Д. Беляев, С. И. Дудов

ВНЕШНЯЯ ОЦЕНКА СЕГМЕНТНОЙ ФУНКЦИИ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ПОЛОСОЙ С ВАРЬИРУЕМОЙ ШИРИНОЙ И НАИМЕНЬШЕЙ ПЛОЩАДЬЮ

1. В работе [1] рассматривалась задача о внешней оценке сегментной функции полиномиальной полосой постоянной наименьшей ширины за счет выбора полиномиальной оси. Ниже мы рассматриваем аналогичную по характеру задачу, в которой не только ось полосы, но и её ширина могут полиномиально меняться. Итак, пусть сегментная функция $F(t) = [f_1(t), f_2(t)]$ задается на отрезке $[c, d]$ непрерывными функциями $f_1(t) \leq f_2(t)$. Через $P_n(A, t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$ обозначим полином степени n с вектором коэффициентов $A = (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. График сегментной функции $\Pi_{n,m}(A, B, t) = [P_n(A, t) - P_m(B, t), P_n(A, t) + P_m(B, t)]$ представляет собой полиномиальную полосу, осью которой является график полинома $P_n(A, t)$, а её ширину в точке t выражает $2P_m(B, t)$. Здесь $B = (b_0, b_1, \ldots, b_m)$ – вектор коэффициентов полинома $P_m(B, t)$.

Рассмотрим задачу

$$\psi(A, B) \equiv \frac{1}{d - c} \int_c^d P_m(B, t) dt \to \min_{(A,B) \in \mathbb{R}^{n+m+2}}, \tag{1}$$

$$\varphi(A, B) \equiv \max_{t \in [c,d]} \max\{P_n(A, t) - P_m(B, t) - f_1(t), \\ f_2(t) - P_m(b, t) - P_n(A, t)\} \leq 0. \tag{2}$$

Величина $(d - c)\psi(A, B)$ выражает площадь полиномиальной полосы $\Pi_{n,m}(A, B, \cdot)$ на отрезке $[c, d]$, а условие (2) означает, что она содержит в себе график сегментной функции $F(t)$ на этом отрезке. Таким образом, задача (1)–(2) требует построения полиномиальной полосы $\Pi_{n,m}(A, B, \cdot)$ с наименьшей площадью, которая содержит в себе график сегментной функции $F(t)$. Легко понять, что при $m = 0$ данная задача совпадает с задачей из [1].

Цель статьи – получить необходимые и достаточные условия решения задачи (1)–(2).

2. Нетрудно видеть, что функция $\varphi(A, B)$ является выпуклой по (A, B) на всем пространстве $\mathbb{R}^{n+m+2}$, а функция $\psi(A, B)$ – даже линейной. Поэтому для исследования задачи (1)–(2) можно использовать средства выпуклого анализа.

Введем обозначения: $D = \{(A, B) \in \mathbb{R}^{n+m+2} : \varphi(A, B) \leq 0\}$,
$\partial\varphi(A, B)$ – субдифференциал выпуклой функции $\varphi(A, B)$,
$co\{\ \}$ – выпуклая оболочка множества $\{\ \}$,
$R(A, B) = \{t \in [c, d] : \varphi(A, B) = 0\}$,
$R_1(A, B) = \{t \in R(A, B) : P_n(A, t) - P_m(B, t) - f_1(t) > f_2(t) - P_m(B, t) - P_n(A, t)\}$,
$R_2(A, B) = \{t \in R(A, B) : f_2(t) - P_m(B, t) - P_n(A, t) > P_n(A, t) - P_m(B, t) - f_1(t)\}$,
$R_3(A, B) = \{t \in R(A, B) : P_n(A, t) - P_m(B, t) - f_1(t) = f_2(t) - P_m(B, t) - P_n(A, t)\}$.

Теорема. *Для того чтобы функция $\psi(A, B)$ достигала в точке $(A^*, B^*) \in D$ своего минимального на D значения, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось включение*

$$(0, \ldots, 0, 1, \frac{d+c}{2}, \frac{d^2+dc+c^2}{3}, \ldots, \frac{\sum_{k=0}^{m} d^{m-k}c^k}{m}) \in$$

$$\in co \begin{cases} [(-1, -t, \ldots, -t^n, 1, t, \ldots, t^m), (1, t, \ldots, t^n, 1, t, \ldots, t^m)], \\ t \in R_3(A, B), \\ (1, t, \ldots, t^n, 1, t, \ldots, t^m), t \in R_2(A, B), \\ (-1, -t, \ldots, -t^n, 1, t, \ldots, t^m), t \in R_1(A, B). \end{cases} \tag{3}$$

Доказательство. В соответствии с критерием решения задачи выпуклого программирования [2, с. 142] точка $(A^*, B^*) \in D$ доставляет минимум функции $\psi(A, B)$ на выпуклом множестве D тогда и только тогда, когда

$$\partial\psi(A^*, B^*) \bigcap K^+((A^*, B^*), D) \neq \emptyset, \tag{4}$$

где $K^+((A^*, B^*), D)$ – сопряженный конус к конусу $K((A^*, B^*), D)$ возможных направлений множества D в точке (A^*, B^*).

Известно [3, с. 31, 39], что

$$K((A, B), D) = \begin{cases} \mathbb{R}^{n+m+2}, & \text{если } \varphi(A, B) < 0, \\ -K^+(\partial\varphi(A, B)), & \text{если } \varphi(A, B) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Здесь под $K(\partial\varphi(A,B))$ понимается коническая оболочка субдифференциала $\partial\varphi(A,B)$.

Функция $\psi(A,B)$ является дифференцируемой, и поэтому, учитывая её явный вид после интегрирования, получаем

$$\partial\psi(A,B) = (0,\ldots,0,1,\frac{d+c}{2},\frac{d^2+dc+c^2}{3},\ldots,\frac{\sum_{k=0}^{m} d^{m-k}c^k}{m}). \qquad (6)$$

Из (5)–(6) вытекает, что выполнение соотношения (4) возможно только в случае $\varphi(A^*,B^*)=0$. Как и в [1], использование субдифференциального исчисления приводит к формуле

$$\partial\varphi(A,B) = co\begin{cases} [(-1,-t,\ldots,-t^n,-1,-t,\ldots,-t^m), \\ (1,t,\ldots,t^n,-1,-t,\ldots,-t^m)], t\in R_3(A,B), \\ (-1,-t,\ldots,-t^n,-1,-t,\ldots,-t^m), t\in R_2(A,B), \\ (1,t,\ldots,t^n,-1,-t,\ldots,-t^m), t\in R_1(A,B). \end{cases} \qquad (7)$$

Подстановка (6) и (7) в (4) с учетом формулы (5) для случая $\varphi(A^*,B^*) = 0$ и несложный анализ приводят к заключению об эквивалентности соотношений (3) и (4).

Теорема доказана.

Включение (3) влечет выполнение включения

$$0_{n+1}\in co\begin{cases} [-(1,t,\ldots,t^n),(1,t,\ldots,t^n)], t\in R_3(A,B), \\ -(1,t,\ldots,t^n), t\in R_2(A,B), \\ (1,t,\ldots,t^n), t\in R_1(A,B). \end{cases} \qquad (8)$$

Как и в [1], можно показать, что соотношение (8) эквивалентно выполнению одного из условий:

1) $R_3(A^*,B^*)\neq\emptyset$,

2) $\exists\{t_i\}_{i=1}^{n+2}\in R_1(A^*,B^*)\bigcup R_2(A^*,B^*)$:
если $t_i\in R_1(A^*,B^*)(R_2(A^*,B^*))$, то $t_{i+1}\in R_2(A^*,B^*)(R_1(A^*,B^*))$.

Условие 2) является аналогом явления альтернанса для известной задачи П. Л. Чебышева о приближении непрерывной функции полиномом. Однако простые примеры говорят о том, что выполнение одного из условий 1)–2) не является достаточным условием решения задачи (1)–(2).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00270) и гранта Президента РФ(проект НШ-4383.2010.1).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Выгодчикова И. Ю., Дудов С. И., Сорина Е. В.* Внешняя оценка сегментной функции полиномиальной полосой // ЖВМ и МФ. 2009. Т. 49, № 7. С. 1175–1183.

2. *Пшеничный Б. Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М. : Наука, 1980. 320 с.

3. *Демьянов В. Ф., Васильев Л. В.* Недифференцируемая оптимизация. М. : Наука, 1981. 340 с.

о

УДК 514.764

А. В. Букушева

ФИНСЛЕРОВО ПРОСТРАНСТВО С МЕТРИКОЙ БЕРВАЛЬДА – МООРА КАК ОБОБЩЕНИЕ МЕТРИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА НЕВЫРОЖДЕННЫХ ПОЛИЧИСЕЛ

На многообразии с метрикой Бервальда – Моора естественным образом определяется полиаффинорная алгебра, являющаяся обобщением алгебры поличисел [1, 2]. Определяются условия, при которых многообразие с полиаффинорной алгеброй наделяется структурой пространства над алгеброй поличисел.

Введение. Под *пространством поличисел* понимается коммутативная ассоциативная алгебра, естественным образом согласованная с метрической функцией Бервальда – Моора (БМ). Алгебра поличисел P_n является обобщением алгебры двойных чисел. В алгебре поличисел P_n существует базис $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$ такой, что $\vec{e}_\alpha \vec{e}_\beta = \delta_{\alpha\beta}\vec{e}_\alpha$. Исследование пространств такого вида получило свое развитие в работах [1, 2]. Если алгебру поличисел рассматривать как гладкое многообразие M, то соответствующая метрика БМ определяется функцией, не зависящей от выбора точки многообразия M. В настоящей статье на многообразии M с метрикой БМ, определяемой полилинейной формой g, естественным образом задается полиаффинорная алгебра с аффинорами $(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n)$. В случае, когда тензорная структура $(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, g)$ интегрируема, мы получаем уже известное пространство поличисел. Используя сведения по интегрируемым аффинорным структурам и пространствам над алгебрами, содержащиеся в обзорах [3, 4], а также работу по гиперкомплексным структурам [5], мы находим условия, при которых финслерово многообразие с метрикой БМ и согласованной с ней полиаффинорной структурой является пространством над алгеброй поличисел.

1. Определение полиаффинорной структуры. Пусть M – связное C^∞-многообразие размерности n. Все встречающиеся на M функции