3. *Широков А. П.* Пространства над алгебрами и их применения // Итоги науки и техники. Современная математика и её приложения / ВИНИТИ. М., 2002. Т. 73. С. 135–161.

4. *Вишневский В. В.* Интегрируемые аффинорные структуры и их плюральные интерпретации // Итоги науки и техники. Современная математика и её приложения / ВИНИТИ. М., 2002. Т. 73. С. 5–64.

5. *Кручкович Г. И.* Гиперкомплексные структуры на многообразиях, I // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. М., 1972. Т. 16. С. 174–201.

УДК 514.764

А. В. Букушева, С. В. Галаев, И. П. Иванченко

О ПОЧТИ КОНТАКТНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ СВЯЗНОСТЬЮ НАД РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ С ФИНСЛЕРОВОЙ МЕТРИКОЙ

Вводятся понятия внутренней и продолженной связности над гладким распределением D контактной структуры с допустимой финслеровой метрикой. С помощью продолженной связности на распределении D как на тотальном пространстве векторного расслоения определяется и исследуется методами внутренней геометрии неголономного многообразия почти контактная метрическая структура.

Введение. В работе R. Miron [1] было положено начало исследованию геометрии финслеровых векторных расслоений, являющихся естественным обобщением касательных расслоений многообразий с финслеровой метрикой. Финслерово векторное расслоение характеризуется заданием на тотальном пространстве векторного расслоения класса линейных связностей, специальным образом ассоциируемых с некоторой инфинитезимальной связностью. В работе [2] было введено понятие гладкого распределения D с допустимой финслеровой метрикой, позволяющее с новой точки зрения взглянуть на проблематику финслеровых векторных расслоений. В работе [2] связность над распределением была названа внутренней связностью распределения, там же было дано определение продолженной связности и определена процедура, позволяющая при дополнительных предположениях перейти от внутренней связности к некоторой продолженной связности. В нашем случае продолженная связность является инфинитезимальной связностью в векторном расслоении $(D,\, \pi,\, X)$, где D – гладкое распределение контактной структуры с допустимой финслеровой метрикой [2]. Мы покажем, что распределение

D с допустимой финслеровой структурой наделяется внутренней (вообще говоря, нелинейной) и продолженной связностями. В этом случае на распределении D естественным образом определяется почти контактная метрическая структура, свойства которой в значительной степени определятся геометрией распределения D. В работе получены инвариантные характеристики некоторых классов почти контактных метрических структур, возникающих на распределении D.

1. Связности над распределением. Под внутренней линейной связностью в неголономном многообразии D [3] понимается отображение $\nabla : \Gamma\, D \times \Gamma\, D \to \Gamma\, D$, удовлетворяющее следующим условиям:

$$1)\nabla_{f_1\vec{u_1}+f_2\vec{u_2}} = f_1\nabla_{\vec{u_1}} + f_2\nabla_{\vec{u_2}}, \qquad 2)\nabla_{\vec{u}}f\vec{v} = f\nabla_{\vec{u}}\vec{v} + (\vec{u}f)\vec{v},$$

где $\Gamma\, D$ – модуль допустимых векторных полей. Коэффициенты линейной связности определятся из соотношения $\nabla_{\vec{e}_a}\vec{e}_b = \Gamma^c_{ab}\vec{e}_c$.

Кручение внутренней линейной связности S по определению полагается равным $S(\vec{X},\vec{Y}) = \nabla_{\vec{X}}\vec{Y} - \nabla_{\vec{Y}}\vec{X} - P[\vec{X},\vec{Y}]$. Таким образом, в адаптированных координатах [4] мы имеем $S^c_{ab} = \Gamma^c_{ab} - \Gamma^c_{ba}$. Так же как и связность в объемлющем пространстве, внутренняя связность может быть определена заданием горизонтального распределения над пространством некоторого векторного расслоения. В случае внутренней связности в качестве такого расслоения выступает тройка $\mu = (D,\, \pi,\, X)$, где $\pi :\ D \to\ X$ – естественная проекция. Для того чтобы задать связность над распределением D, необходимо предварительно ввести на D структуру гладкого многообразия, которая задается следующим образом. Каждой адаптированной карте $K(x^\alpha)$ на многообразии X ставится в соответствие карта $\tilde{K}(x^\alpha, x^{n+\alpha})$ на многообразии D, где $x^{n+\alpha}$ – координаты допустимого вектора в базисе $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma^n_a\partial_n$.

Говорят, что задана связность над распределением D, если распределение $\widetilde{D} = \pi_*^{-1}(D)$, где $\pi : D \to X$ – естественная проекция, разбивается в прямую сумму вида $\widetilde{D} = HD \oplus VD$, где VD – вертикальное распределение на тотальном пространстве D. Таким образом, задание связности над распределением эквивалентно заданию объекта $G^a_b(X^a, X^{n+a})$ такого, что $HD = Span(\vec{\epsilon}_a)$, где $\vec{\epsilon}_a = \partial_a - \Gamma^n_a\partial_n - G^b_a\partial_{n+b}$. В работе [2] было введено понятие продолженной связности. Продолженная связность получается из внутренней связности с помощью равенства $TD = \widetilde{HD} \oplus VD$, где $HD \subset\ \widetilde{HD}$. По существу, продолженная связность является связностью в векторном расслоении. Будем называть продолженную связность естественным продолжением связности над распределением, если $\widetilde{HD} = HD \oplus Span(\partial_n)$. Заметим, что векторное поле ∂_n задано глобально на всем многообразии D. Использование внутренней и продолженной связностей дает возможность по-новому охарактеризовать уже известные почти контактные метрические пространства [5].

Теорема 1 ([4]). *Контактная метрическая структура является нормальной тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:* $L_{\vec{\xi}}\varphi = 0$, $\nabla\varphi$, *где* ∇ *– внутренняя метрическая связность.*

Теорема 2 ([4]). *Почти комплексная структура* φ *интегрируема тогда и только тогда, когда выполняется равенство* $\nabla^1\varphi = 0$, *где* ∇^1 *– естественное продолжение связности* ∇.

Проводя необходимые вычисления, получаем:

$$[\vec{\epsilon}_a,\, \vec{\epsilon}_b] = 2\omega_{ab}\,\partial_n + R^c_{ab}\,\partial_{n+c},$$

$$[\vec{\epsilon}_a,\, \partial_n] = \partial_n\Gamma^n_a\partial_n + \partial_n G^b_a\partial_{n+b}, \tag{1}$$

$$[\vec{\epsilon}_a,\, \partial_{n+b}] = G^c_{ab}\partial_{n+c},$$

где $R^c_{ba} = 2(\vec{e}_{[b}G^c_{a]} - G^d_{[a}G^c_{b]\cdot d})$ и $\partial_n\Gamma^n_a$ соответственно первый и второй тензоры кривизны Схоутена. Если определить распределение $\widetilde{HD}$ равенством $\widetilde{HD} = HD \oplus Span(\vec{u})$, где $\vec{u} = \partial_n - G^a_n\partial_{n+a}$, $G^d_n(x^\alpha,\, v^c) = \omega^{ba}(x^\alpha)R^d_{ab}(x^\alpha,\, v^c)$, то равенства (1) перепишутся в виде $[\vec{\epsilon}_a,\, \vec{\epsilon}_b] = 2\omega_{ab}\vec{u} + {}+K^c_{ab}\partial_{n+c}$, $[\vec{\epsilon}_a,\, \vec{u}] = \partial_n\Gamma^n_a\vec{u} + K^c_{na}$, где K^c_{ab} и K^c_{na} определяют тензор кривизны Вагнера [3].

2. Допустимые финслеровы структуры и почти контактные метрические структуры на гладком распределении. Предположим, что на многообразии D задана функция $L(x^\alpha,\, x^{n+a})$ такая, что выполняются следующие условия:

1. L – гладкая положительная функция на $D^0 = D\backslash\vec{0}$;
2. L – однородна степени 1 относительно слоевых координат;
3. Квадратичная форма $L^2_{\cdot a\cdot b}\xi^a\xi^b = \frac{\partial^2 L^2}{\partial x^{n+a}\partial x^{n+b}}$ положительно определена.

Назовем функцию $L(x^\alpha,\, x^{n+a})$ допустимой финслеровой метрикой, а пару $(D,\, L)$ – контактным финслеровым распределением. Допустимым финслеровым тензорным полем типа $(p,\, q))$ назовем морфизм $t : D^0 \to {} \to T^p_q(X)$ такой, что $t(z) \in T^p_{\pi(z)q}(X)$, где $T^p_q(X)$ – расслоение тензоров типа $(p,\, q)$ на многообразии X. Непосредственно проверяется, что объект $g_{ab}(x^\alpha,\, x^{n+c}) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^{n+a}\partial x^{n+b}} = \frac{1}{2}F_{\cdot a\cdot b}$ является допустимым финслеровым тензорным полем. Покажем, что с каждым контактным финслеровым распределением ассоциируется некоторая внутренняя и соответствующая ей продолженная связность. Как следует из изложенного выше, для задания внутренней и продолженной связностей необходимо задать объект внутренней связности $G^a_b(x^a,\ x^{n+a})$, а также задать разложение $TD = \widetilde{HD} \oplus VD$, где $HD \subset \widetilde{HD}$. Имеет место

Теорема 3 ([2]). *Для распределения D с допустимой финслеровой метрикой существует единственная продолженная метрическая связность такая, что выполняется условие $G^a_{b\cdot c} = G^a_{c\cdot b}$.*

В процессе доказательства теоремы, в частности, доказывается, что продолженная метрическая связность порождается распределением $\widetilde{HD} = HD \oplus Span(\vec{u})$. Если на многообразии X задана допустимая финслерова структура, то в D возникает внутренняя связность, порождаемая распределением $HD = span(\vec{\epsilon}_\alpha)$, где $\vec{\epsilon}_a = \partial_a - \Gamma^n_a \partial_n - G^b_{ac} x^{n+c} \partial_{n+b}$, $G^a_{bc} = G^a_{\cdot b \cdot c} = \partial_{n+b}\partial_{n+c} G^a$, $G^a = g^{ab}(\partial_c L^2_{\cdot b} x^{n+c} - \vec{e}_b L^2)$, $g_{ab} = \frac{1}{2} L^2_{\cdot a \cdot b}$. Определим на многообразии D допустимое к распределению $\tilde{D}$ поле аффинора J, полагая $J(\vec{\epsilon}_a) = \partial_{n+a}$, $J(\partial_{n+a}) = -\vec{\epsilon}_a$. С помощью равенств $\tilde{g}(\vec{u}^h, \vec{v}^h) = \tilde{g}(\vec{u}^v, \vec{v}^v) = g(\vec{u}, \vec{v})$, $\tilde{g}(\vec{u}^h, \vec{v}^v) = 0$, где g – допустимая финслерова структура, на многообразии D определяется допустимая риманова метрика. Учитывая равенство $\tilde{g}(J(\vec{u}), J(\vec{v})) = \tilde{g}(\vec{u}, \vec{v})$, получаем следующую теорему.

Теорема 4. *Пара допустимых структур $(J, \tilde{g})$ определяет на многообразии D почти контактную метрическую структуру.*

Найдем условия, при которых допустимая почти комплексная структура J является интегрируемой. Сверхкарта порождает на многообразии D поле неголономного базиса $(\vec{\epsilon},\ \partial_n,\ \partial_{n+a})$. Используя равенства (1) и теорему 2, убеждаемся в справедливости следующей теоремы:

Теорема 5. *Почти комплексная структура J является интегрируемой тогда и только тогда, когда выполняются следующие равенства: $R^c_{ab} = 0$, $\partial_n G^b_a = 0$.*

Таким образом, на распределении D возникает почти контактная метрическая структура $(\tilde{g},\ J,\ \tilde{D},\ \vec{\epsilon},\ \lambda)$, $\lambda = \eta \circ \pi_*$, $\vec{\epsilon} = \partial_n$.

Теорема 6. *Почти контактная метрическая структура является квазисасакиевой тогда и только тогда, когда тензоры кривизны Схоутена обращаются в нуль.*

Доказательство. Прямым вычислением проверяется, что фундаментальная форма структуры имеет вид $\Omega = g_{ab} dx^a \wedge \Theta^{n+b}$. После вычисления ее дифференциала, убеждаемся в справедливости теоремы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Miron R.* Techniques of Finsler geometry in the theory of vector bundles // Acta Sci. Math. 1985. № 49. P. 119–129.

2. *Galaev S. V.* Extension of the interior connection of a nonholonomic manifold with a Finsler metric // URL : http://arxiv.org/abs/1103.4337.

3. *Вагнер В. В.* Геометрия $(n-1)$-мерного неголономного многообразия в n-мерном пространстве // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1941. Вып. 5. С. 173–255.

4. *Galaev S. V.* The Intrinsic Geometry of Almost Contact Metric Manifolds // URL : http://arxiv.org/abs/1107.5532.

5. *Blair D. E.* Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds. Birkhauser, Boston, 2002.

УДК 517.984

М. Ш. Бурлуцкая, А. П. Хромов

АСИМПТОТИКА ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ РЕШЕНИЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА

В статье предложен новый элементарный метод получения асимптотических формул для решения двумерного уравнения Дирака. Используя этот метод, получены уточненные асимптотические формулы решений при больших значениях спектрального параметра.

Рассматривается следующая система Дирака:

$$y'(x) + P(x)y(x) = \lambda D y(x), \tag{1}$$

где $y(x) = (y_1(x), y_2(x))^T$ (T – знак транспонирования), $y_j \in C^1[0,1]$, $P(x) = \begin{pmatrix} 0 & q_2(x) \\ q_1(x) & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $q_j \in C^1[0,1]$, λ – комплексный параметр.

В случае подобного скалярного уравнения (если $P(x)$, $y(x)$ – скалярные функции) слагаемое $P(x)y(x)$ уничтожается известной подстановкой. В векторном случае этого, вообще говоря, сделать нельзя. Здесь используется метод, называемый *L-диагонализацией*: с помощью определенной подстановки слагаемое $P(x)y(x)$ не уничтожается, но делается сколь угодно малым (имеет оценку $O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$). Этот метод, описанный, например, у И. М. Раппопорта [1], позволяет получить для общего решения уравнения (1) следующую асимптотическую формулу:

$$y(x,\lambda) = \left(E + O\left(\lambda^{-1}\right)\right) e^{\lambda D x} c, \tag{2}$$

где E – единичная матрица 2×2, $c = (c_1, c_2)^T$ – произвольный вектор, матрица-функция $O\left(\lambda^{-1}\right)$ регулярная [1] в полуплоскостях $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$ и

[1]Под регулярностью понимается аналитичность функции внутри области и непрерывность на границе.