7. *Букушева А. В., Галаев С. В.* О допустимой келеровой структуре на касательном расслоении к неголономному многообразию // Математика. Механика: сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2005. Вып. 7. С. 12–14.

УДК 514.764

С. В. Галаев, А. В. Гохман

О ВНУТРЕННЕЙ ГЕОМЕТРИИ МЕТРИЧЕСКИХ ПОЧТИ КОНТАКТНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

В статье вводится понятие внутренней геометрии многообразия почти контактной метрической структуры. В терминах внутренней геометрии дается описание некоторых классов пространств с почти контактной метрической структурой. Вводится новый тип почти контактных метрических пространств – эрмитовых почти контактных метрических пространств.

Введение. В терминологии В. В. Вагнера [1, 2] многообразие почти контактной метрической структуры является неголономным многообразием коразмерности 1 с дополнительными, называемыми им внутренними, структурами. Мы определяем внутреннюю геометрию почти контактного метрического пространства X как совокупность тех свойств, которыми обладают: гладкое распределение D, задаваемое контактной формой η; допустимое поле аффинора φ (называемое нами допустимой почти комплексной структурой) такое, что $\varphi^2 = -1$; поле допустимых тензоров римановой метрики g, связанное с допустимой почти комплексной структурой равенством $g(\varphi\vec{X}, \varphi\vec{Y}) = g(\vec{X}, \vec{Y})$, где $\vec{X}, \vec{Y}$ – допустимые векторные поля. К объектам внутренней геометрии почти контактного метрического пространства следует отнести и те объекты, которые являются производными от уже указанных внутренних структур: кососимметрическая 2-форма $\omega = d\eta$; векторное поле $\vec{\xi}$, называемое полем Риба, определяющее оснащение распределения D – $\vec{\xi} \in D^{\perp}$, и однозначно определяемое равенствами $\eta(\vec{\xi}) = 1$, $ker\omega = Span(\vec{\xi})$ в случае, когда форма ω имеет максимальный ранг; внутренняя связность ∇, осуществляющая параллельный перенос допустимых векторов вдоль допустимых кривых и однозначно определяемая полем g; связность ∇^1, являющаяся естественным продолжением связности ∇ и осуществляющая параллельный перенос допустимых векторов вдоль произвольных кривых многообразия X.

1. Допустимые тензорные структуры. Пусть X – гладкое многообразие нечетной размерности n, $\Xi(X)$ – $C^{\infty}(X)$-модуль гладких векторных полей на X, d – оператор внешнего дифференцирования. Все многообразия, тензорные поля и другие геометрические объекты предполагаются гладкими класса C^∞. Для упрощения изложения тензорное поле в дальнейшем иногда называется тензором. Почти контактной метрической структурой на X называется совокупность $(\varphi, \vec{\xi}, \eta, g)$ тензорных полей на X, где φ – тензор типа (1, 1), называемый структурным эндоморфизмом, $\vec{\xi}$ и η – вектор и ковектор, называемые соответственно структурным вектором и контактной формой, g – (псевдо) риманова метрика. При этом

$$\eta(\vec{\xi}) = 1,\ \varphi(\vec{\xi}) = 0,\ \eta \circ \varphi = 0,\ \varphi^2 \vec{X} = -\vec{X} + \eta(\vec{X})\vec{\xi},$$
$$g(\varphi\vec{X}, \varphi\vec{Y}) = g(\vec{X}, \vec{Y}) - \eta(\vec{X})\eta(\vec{Y}),$$

$\vec{X}, \vec{Y} \in \Xi(X)$. Легко проверить, что тензор $\Omega(\vec{X}, \vec{Y}) = g(\vec{X}, \varphi\vec{Y})$ кососимметричен. Он называется фундаментальной формой структуры. Многообразие, на котором фиксирована почти контактная метрическая структура, называется почти контактным метрическим многообразием. В случае, когда $\Omega = d\eta$, почти контактная метрическая структура называется контактной метрической структурой. Почти контактная метрическая структура называется нормальной, если $N_\varphi + 2d\eta \otimes \vec{\xi} = 0$, где N_φ – кручение Нейенхейса, образованное тензором φ. Нормальная контактная метрическая структура называется сасакиевой структурой. Многообразие, с заданной на нем сасакиевой структурой, называется сасакиевым многообразием. Пусть D – гладкое распределение коразмерности 1, определяемое формой η, $D^\perp = Span(\vec{\xi})$ – его оснащение. В дальнейшем будем полагать, что ограничение формы $\omega = d\eta$ на распределении D является невырожденной формой. В этом случае вектор $\vec{\xi}$ однозначно определяется из условий $\eta(\vec{\xi}) = 1$, $ker\omega = Span(\vec{\xi})$ и называется вектором Риба. Гладкое распределение D мы иногда будем называть неголономным многообразием.

Для исследования внутренней геометрии неголономного многообразия и, вообще, для изучения почти контактных метрических структур, удобно использовать карты, обладающие дополнительными свойствами. Карту $K(x^\alpha)$ $(\alpha, \beta, \gamma = 1, ..., n)$ $(a, b, c, e = 1, ..., n-1)$ на многообразии X будем называть адаптированной [3, 4] к неголономному многообразию D, если $D^\perp = Span(\frac{\partial}{\partial x^n})$. Нетрудно установить, что любые две адаптированные карты связаны между собой преобразованиями вида: $x^a = x^a(x^{\tilde{a}})$, $x^n = x^n(x^{\tilde{a}}, x^{\tilde{n}})$. Такие системы координат называются Вагнером в работе [2] градиентными.

Пусть $P : TX \to D$ – проектор, определяемый разложением $TX = D \oplus D^\perp$, и $K(x^\alpha)$ – адаптированная карта. Векторные поля $P(\partial_a) = \vec{e}_a =$

$\partial_a - \Gamma^n_a \partial_n$ линейно независимы и в области определения соответствующей карты порождают систему D: $D = Span(\vec{e}_a)$. Таким образом, мы имеем на многообразии X неголономное поле базисов $(\vec{e}_a, \partial_n)$ и соответствующее ему поле кобазисов $(dx^a, \theta^n = dx^n + \Gamma^n_a dx^a)$. Непосредственно проверяется, что $[\vec{e}_a \vec{e}_b] = M^n_{ab}\partial_n$, где компоненты M^n_{ab} образуют так называемый тензор неголономности (см. [2]). Если потребовать, чтобы для всех адаптированных координат выполнялось равенство $\vec{\xi} = \partial_n$, то окажется справедливым равенство $[\vec{e}_a \vec{e}_b] = 2\omega_{ba}\partial_n$, где $\omega = d\eta$. В дальнейшем ограничимся рассмотрением исключительно адаптированных координат с условием $\vec{\xi} = \partial_n$. Адаптированным будем называть также базис $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma^n_a \partial_n$ как базис, определяемый адаптированной картой. При преобразовании адаптированной системы координат векторы адаптированного базиса преобразуются следующим образом: $\vec{e}_a = \frac{\partial x^{\tilde{a}}}{\partial x^a}\vec{e}_{\tilde{a}}$.

Тензорное поле, заданное на почти контактном метрическом многообразии, назовем допустимым (к распределению D), если оно обращается в нуль каждый раз, когда его векторный аргумент принадлежит оснащению $D^{\perp}$, а ковекторный аргумент коллинеарен форме η. Координатное представление допустимого тензорного поля типа (p,q) в адаптированной карте имеет вид: $t = t^{a_1 \dots a_p}_{b_1 \dots b_q} \vec{e}_{a_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{a_p} \otimes dx^{b_1} \otimes \dots \otimes dx^{b_q}$.

Так, в частности, под допустимым векторным полем будем понимать такое векторное поле, все значения которого лежат в распределении D, а под допустимой 1-формой будем понимать всякую 1-форму, обращающуюся в нуль на оснащении $D^{\perp}$. Понятно, что всякая тензорная структура, заданная на многообразии X, определяет на нем единственную допустимую тензорную структуру того же типа. Из определения почти контактной структуры следует, что аффинор φ является допустимым тензорным полем типа $(1,1)$. Поле аффинора φ мы называем допустимой почти комплексной структурой. Форма $\omega = d\eta$ также является допустимым тензорным полем. В геометрии расслоенных пространств допустимое тензорное поле называется полубазисным.

Назовем допустимое тензорное поле интегрируемым, если найдется такой атлас адаптированных карт, что в каждой из карт этого атласа компоненты поля постоянны. Из теоремы 1 немедленно получаем, что необходимым условием интегрируемости допустимого поля t является обращение в нуль производных $\partial_n t$. Назовем допустимую тензорную структуру t квазиинтегрируемой, если в адаптированных координатах выполняется равенство $\partial_n t = 0$. Форма $\omega = d\eta$ является важным примером интегрируемой допустимой тензорной структуры. Введем в рассмотрение тензор $\tilde{N}_\varphi(\vec{X}, \vec{Y}) = (P \circ N_\varphi)(\vec{X}, \vec{Y})$, где $\vec{X}, \vec{Y} \in \Xi(X)$. Следующие две теоремы указывают на важность только что данных определений.

Теорема 1. *Аффинорная структура φ интегрируема тогда и только тогда, когда имеет место равенство $\tilde{N}_\varphi = 0$.*

Теорема 2. *Почти контактная метрическая структура является нормальной тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия: $\tilde{N}_\varphi = 0$, $\omega(\varphi\vec{u}\varphi\vec{v}) = \omega(\vec{u},\vec{v})$.*

2. Внутренние характеристики почти контактных метрических многообразий. В настоящем разделе мы будем придерживаться следующих обозначений: допустимые почти комплексная и риманова метрика по-прежнему будут обозначаться с помощью символов φ и g; символ ∇ будет обозначать внутреннюю метрическую связность, а символ $\tilde{g}$ – метрический тензор в объемлющем пространстве.

Теорема 3. *Контактная метрическая структура является нормальной тогда и только тогда, когда структура φ квазиинтегрируема и выполняется равенство $\nabla\varphi = 0$, где ∇ – внутренняя метрическая связность.*

Заметим, что равенство $\nabla\varphi = 0$ оказывается не верным, если связность ∇ и аффинорная структура φ рассматриваются как структуры, заданные на всем многообразии.

Пусть ∇^1 – продолженная связность, конструируемая из внутренней связности следующим образом: $\widetilde{HD} = HD \oplus Span(\partial_n)$ (здесь ∂_n векторное поле на многообразии D). Продолженная связность позволяет сформулировать следующий характеристический признак интегрируемости почти комплексной структуры φ.

Теорема 4. *Почти комплексная структура φ интегрируема тогда и только тогда, когда выполняется равенство $\nabla^1\varphi = 0$.*

В заключение работы сформулируем утверждение, касающееся K-контактных многообразий.

Теорема 5. *Почти контактная метрическая структура является K-контактной структурой тогда и только тогда, когда форма g квазиинтегрируема.*

Справедливость теоремы следует из следующей цепочки эквивалентностей: $L_{\vec{\xi}}\tilde{g} = 0 \Leftrightarrow L_{\vec{\xi}}g = 0 \Leftrightarrow \partial_n g = 0$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Вагнер В. В.* Дифференциальная геометрия неголономных многообразий: VIII Междунар. конкурс на соискание премии им. Н. И. Лобачевского (1937). Отчёт. Казань : Казан. физ.-мат. общ-во, 1940. 327 с.

2. *Вагнер В. В.* Геометрия $(n-1)$-мерного неголономного многообразия в n-мерном пространстве // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1941. Вып. 5. С. 173–255.

3. *Букушева А. В., Галаев С. В.* О допустимой келеровой структуре на касательном расслоении к неголономному многообразию // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2005. Вып. 7. С. 12–14.

4. *Galaev S. V.* Extension of the interior connection of a nonholonomic manifold with a Finsler metric // URL : http://arxiv.org/abs/1103.4337.

УДК 517.984

Р. А. Иванов, В. Е. Фирстов

ПРИНЦИП МИНИМУМА ИНФОРМАЦИИ ПРИ ОПТИМИЗАЦИИ ГРУППОВОГО СОТРУДНИЧЕСТВА В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ

При организации группового сотрудничества в учебном процессе наиболее важным моментом является формирование разбиения обучаемого контингента на коалиции, при котором обеспечивается оптимальный учебный эффект. Процедура оптимизации в данном случае исходит из следующей информационной модели [1 – 3].

1. Модель. Пусть $A = \{a_1; a_2; \ldots; a_m\}$ – конечное множество, представляющее обучаемый контингент, которому предлагается выполнить некоторое задание (тест), и контролируется время его выполнения отдельными учащимися. В результате такого измерения устанавливается цепочка неравенств $0 < t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_m < T$, где t_i – общее время выполнения задания i-м учащимся, в котором определенным образом учтено качество проделанной работы; $i = \overline{1; m}; T$ – временной регламент, определяемый параметрами теста. Пусть данная цепочка неравенств есть некоторое устойчивое статистическое среднее, на основе которого определяются вероятности $\alpha_i = 1 - t_i/T$, характеризующие уровень обученности i-го учащегося, и задающие распределение нормированных вероятностей

$$p(\alpha_i) = \frac{\alpha_i}{\alpha} = \frac{\alpha_i}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m}, i = \overline{1; m}. \qquad (1)$$

Пусть для улучшения показателей обучения контингента A задействована технология группового сотрудничества, что формально выражается в виде разбиения множества

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n,\ A_j \cap Ak = \oslash,\ j \neq k,\ j; k = \overline{1, n}, \qquad (2)$$

где

$$|A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n| = |A| = m. \qquad (3)$$