(ii) $(x,x,x)\in R$ для любого $x\in X$;

(iii) $(x_1,x_2,x_3)\in R \Longrightarrow (x_{i_1},x_{i_2},x_{i_3})\in R$ для любых $1\le i_1,i_2,i_3\le 3$;

(iv) $(x,y,z),(z,y,v)\in R \Longrightarrow (x,y,v)\in R$ для любых элементов $x,y,z,v\in X$, удовлетворяющих условию $y\neq z$.

При этом 3-эквивалентность R называется *квазиуниверсальной*, если для любых элементов $x,y\in X$ найдется такой отличный от них элемент $z\in X$, что $(x,y,z)\in R$.

Основная теорема. *Пусть $\mathcal{A}=(Q,A,B,\delta,\lambda)$ – произвольный автомат без равнодействующих входных сигналов. Тогда $\mathcal{A}$ в том и только том случае является универсальным планарным автоматом $\mathrm{Atm}(\Pi_Q,\Pi_B)$ для некоторых плоскостей $\Pi_Q=(Q,L_Q)$, $\Pi_B=(B,L_B)$, если канонические отношения R_Q, R_B этого автомата являются квазиуниверсальными 3-эквивалентностями на множествах Q и B соответственно, а также выполняются следующие свойства:*

1) если $(q_1,q_2,q_3)\in Q^3\setminus R_Q$, то для любых $x_1,x_2,x_3\in Q$, $y_1,y_2,y_3\in$ $\in B$ найдется такой элемент $a\in A$, что $\delta_a(q_i)=x_i$ и $\lambda_a(q_i)=y_i$ для всех $1\le i\le 3$;

2) если для отображений $\varphi:Q\to Q$, $\psi:Q\to B$ при любых значениях $q_1,q_2,q_3\in Q$ существует $x\in A$, для которого $\delta_x(q_i)=\varphi(q_i)$ и $\lambda_x(q_i)=\psi(q_i)$ для всех $1\le i\le 3$, то найдется такой элемент $a\in A$, что $\delta_a(q)=\varphi(q)$ и $\lambda_a(q)=\psi(q)$ для всех $q\in Q$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Картеси Ф.* Введение в конечные геометрии. М. : Наука, 1980.

2. *Плоткин Б. И., Гринглаз Л. Я., Гварамия А. А.* Элементы алгебраической теории автоматов. М. : Высшая школа, 1994.

3. *Molchanov V. A.* On definability of universal planar automaton by its semigroup of input symbols // Semigroup Forum. 2011. Vol. 82. P. 1–9.

4. *Улам С.* Нерешенные математические задачи. М. : Наука, 1964.

УДК 513.6

С. И. Небалуев

СПЕКТРАЛЬНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ КАРТАНА — ЛЕРЕ ДЛЯ ТОЛЕРАНТНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Основным результатом статьи является теорема о спектральной последовательности Картана — Лере для толерантных пространств.

Пусть π – произвольная группа. Рассмотрим [1, 2] толерантное пространство (T пространство) (K,ξ), где $K=\pi\times\mathbb{N}$,

$$(g_1,a_1)\xi(g_2,a_2)\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{l} g_1=g_2, a_1=a_2;\\ a_1\neq a_2.\end{array}\right.$$

Предложение 1. (K,ξ) – *линейно связное T пространство с тривиальными (в положительных размерностях) гомотопическими и гомологическими группами:* $(\forall n \geqslant\ 1)\ \pi_n(K)=0,\ H_n(K)=0.$ $\Box$

На пространстве (K,ξ) определено действие группы π:

$$h\cdot(g,a)=(gh^{-1},a),\ (g,a)\in K,\ h\in\pi.$$

Это действие является точным, но не вполне разрывным [3].

Построим новое пространство (K',ξ'), в котором

$$K'=\{g_0,\ldots,g_s;a_0,\ldots,a_s|s\in\mathbb{N}\cup\{0\},g_i\in\pi,a_i\in\mathbb{N},a_i<a_{i+1},i=\overline{0,s},\}$$

$$(g_0,\ldots,g_s;a_0,\ldots,a_s)\xi'(h_0,\ldots,h_t;b_0,\ldots,b_t)\underset{s\leqslant t}{\Longleftrightarrow}$$

$$g_0=h_{i_0},\ldots,g_s=h_{i_s};a_0=b_{i_0},\ldots,a_s=b_{i_s},0\leqslant i_0<\ldots<i_s\leqslant t.$$

Так как симплициальный комплекс $\overset{\circ}{S}(K')$ (см. [2]) является барицентрическим подразбиением комплекса $\overset{\circ}{S}(K)$, то $H_n(K')=H_n(K)=0,\ n\geqslant 1$. Из результатов работы [2, гл. 3, п. 3] следует, что $\pi_1(K')=\pi_1(K)=0$. Применив далее теоерму Гуревича [4], получим

Предложение 2. *T пространство (K',ξ') линейно связное и*

$$(\forall n\geqslant 1)\ \pi_n(K')=0,\ H_n(K')=0.\ \Box$$

На (K',ξ') можно определить вполне разрывное действие (см. [3]) группы π:

$$h\cdot(g_0,\ldots,g_s;a_0,\ldots,a_s)=(g_0h^{-1},\ldots,g_sh^{-1};a_0,\ldots,a_s).$$

Обозначим T пространство орбит через $(\pi\backslash K',\xi'_\pi)$ (см. [3]). С помощью результатов работ [3, 5] доказывается

Теорема 1. *Группа π действует вполне разрывно на линейно связном T пространстве (K',ξ'), у которого $(\forall n\geqslant 1)\ \pi_n(K')=0,\ H_n(K')=$ $=0$. Фактор-отображение $p':(K',\xi')\longrightarrow(\pi\backslash K',\xi'_\pi)$ является универсальным T накрытием, имеющим π в качестве накрывающих преобразований. При этом $\pi_1(\pi\backslash K')\cong\pi$, $(\forall n\geqslant 2)\ \pi_n(\pi\backslash K')=0.$* $\Box$

Для прозвольной группы π ее группы гомологий с коэффициентами в (левом) π-модуле M определяются формулой

$$(\forall n\geqslant 0)\ \ H_n(\pi;M)=\mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}[\pi]}(\mathbb{Z},M),$$

где $\mathbb{Z}[\pi]$ – групповое кольцо. Это означает, что для получения групп $H_n(\pi; M)$, $n \geqslant 0$, надо взять точную (ацикличную) последовательность свободных π-модулей (правых) вида

$$\ldots \xrightarrow{\partial} C_n \xrightarrow{\partial} \ldots \xrightarrow{\partial} C_1 \xrightarrow{\partial} C_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0. \tag{1}$$

Тогда $H_n(\pi; M) = H_n(C_n \otimes_{\mathbb{Z}[\pi]} M)$, $n \geqslant 0$.

Пусть теперь (X, τ) – линейно связное T пространство, у которого $\pi_1(X) = \pi$, $(\forall n \geqslant 2)\ \pi_n(X) = 0$. Тогда из [3] и [5] следует, что для универсального T накрытия $p : (\overline{X}, \overline{\tau}) \longrightarrow (X, \tau)$ получим $(\forall n \geqslant 1)\ \pi_n(\overline{X}) = 0$, $H_n(\overline{X}) = 0$. Отсюда следует, что в качестве последовательности (1) можно взять пополненный цепной комплекс $\{C'_n(\overline{X}), \partial_n\}_{n \geqslant 0}$ упорядоченных цепей (см. [2]). Следовательно, $(\forall n \geqslant 0)\ H_n(\pi; M) = H_n(C'(\overline{X}) \otimes_{\mathbb{Z}[\pi]} M)$. С помощью явного построения цепного изоморфизма доказывается, что

$$(\forall n \geqslant 0)\ H_n(C'(\overline{X}) \otimes_{\mathbb{Z}[\pi]} M) \cong H_n(X; M),$$

где $H_n(X; M)$ – гомологии T пространства (X, τ) с локальными коэффициентами, определяемыми π-модулем M. Итак, в предыдущих обозначениях имеет место

Теорема 2. $(\forall n \geqslant 0)\ H_n(\pi; M) \cong H_n(X; M)$. $\square$

Пусть (X, τ) – линейно связное T пространство, на котором вполне разрывно действует (справа) группа π. Тогда (см. [3]) имеется регулярное T накрытие $p : (X, \tau) \longrightarrow (Y = X/\pi, \theta = \tau_\pi)$, $p(x) = x \cdot \pi$, у которого $\pi \cong \pi_1(Y)/p_\pi(\pi_1(X))$ – группа накрывающих преобразований.

По теоореме 1 имеется ацикличное T пространство (K', ξ'), на котором вполне разрывно действует (слева) группа π, что определяет универсальное T накрытие $p' : (K', \xi') \longrightarrow (P = \pi \backslash K, \xi = \xi'_\pi)$.

На пространстве $(K' \times X, \xi' \times \tau)$ определим действие π:

$$g \cdot (u, x) = (g \cdot u, x \cdot g^{-1}),\ g \in \pi,\ u \in K',\ x \in X,$$

с пространством орбит $(E = \pi \backslash (K' \times X), \overline{\tau} = (\xi' \times \tau)_\pi)$. Тогда T отображения

$$P \xleftarrow{r_1} K' \times X \xrightarrow{r_2} Y,\ r_1(u, x) = p'(u),\ r_2(u, x) = p(x),$$

индуцируют T отображения $P \xleftarrow{\varphi_1} E \xrightarrow{\varphi_2} Y$, которые являются T расслоениями [6] со слоями (X, τ) и (K', ξ') соответственно.

Из ацикличности (K', ξ') и спектральной последовательности Лере — Серра для расслоения φ_2 [6] спектральная последовательность Лере —

Серра $\{\mathcal{E}^m = \bigoplus\limits_{s,t} \mathcal{E}^m_{s,t}\}$, сходящаяся к $H(E)$, такая, что (см. также теорему 2) $\mathcal{E}^2_{s,t} \cong H_s(P; H_t(X)) \cong H_s(\pi; H_t(X))$. Отсюда, с учетом (2), получается

Теорема 3 (спектральная последовательность Картана — Лере). *Пусть (X, τ) – линейно связное T пространство, на котором вполне разрывно действует группа π, и пусть $(Y = X/\pi, \theta = \tau_\pi)$ – пространство орбит. Тогда существует спектральная последовательность $\{\mathcal{E}^m = \bigoplus\limits_{s,t} \mathcal{E}^m_{s,t}\}$, сходящаяся к $H(Y)$, такая, что $\mathcal{E}^2_{s,t} \cong H_s(\pi; H_t(X))$.* $\square$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Zeeman E. C.* The topology of brain and visual perception // The Topology of 3-Manifolds /ed. M. K. Ford, London, 1962.
2. *Небалуев С. И.* Гомологическая теория толерантных пространств. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2006.
3. *Небалуев С. И.* Накрывающие преобразования толерантных пространств // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам: межвуз. сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2003. вып. 2. С. 30–35.
4. *Небалуев С. И., Сусин М. Н.* Толерантное расслоение путей и теорема Гуревича для толерантных пространств // Изв. Сарат. ун-та. Нов. Сер. 2009. Т. 9. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 4, ч. 1. С. 41–44.
5. *Небалуев С. И.* Точные гомотопические последовательности в теории толерантных пространств // Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения: труды VI Международной конференции. Чебышевский сборник : Тула, 2004. Т.V, вып. 3(11). С. 64–97.
6. *Небалуев С. И., Кляева И. А., Сусин М. Н.* Построение спектральной последовательности толерантного расслоения // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам : межвуз. сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2009. вып. 5. С. 94–118.

УДК 519.7

В. Е. Новиков

НЕКОТОРЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД ФОРМАЛЬНЫМИ КОНТЕКСТАМИ

В статье представлено исследование формальных контекстов с точки зрения их алгебраических преобразований. Если в предыдущих исследованиях [1, 2] формальный контекст рассматривался как некоторая фиксированная данность, то эта статья открывает исследование поведения структуры концептов при изменении содержания контекста, т. е. динамического процесса в контексте.