Серра $\{\mathcal{E}^m = \bigoplus\limits_{s,t} \mathcal{E}^m_{s,t}\}$, сходящаяся к $H(E)$, такая, что (см. также теорему 2) $\mathcal{E}^2_{s,t} \cong H_s(P; H_t(X)) \cong H_s(\pi; H_t(X))$. Отсюда, с учетом (2), получается

Теорема 3 (спектральная последовательность Картана — Лере). *Пусть (X, τ) – линейно связное T пространство, на котором вполне разрывно действует группа π, и пусть $(Y = X/\pi, \theta = \tau_\pi)$ – пространство орбит. Тогда существует спектральная последовательность $\{\mathcal{E}^m = \bigoplus\limits_{s,t} \mathcal{E}^m_{s,t}\}$, сходящаяся к $H(Y)$, такая, что $\mathcal{E}^2_{s,t} \cong H_s(\pi; H_t(X))$.* $\square$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Zeeman E. C.* The topology of brain and visual perception // The Topology of 3-Manifolds /ed. M. K. Ford, London, 1962.
2. *Небалуев С. И.* Гомологическая теория толерантных пространств. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2006.
3. *Небалуев С. И.* Накрывающие преобразования толерантных пространств // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам: межвуз. сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2003. вып. 2. С. 30–35.
4. *Небалуев С. И., Сусин М. Н.* Толерантное расслоение путей и теорема Гуревича для толерантных пространств // Изв. Сарат. ун-та. Нов. Сер. 2009. Т. 9. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 4, ч. 1. С. 41–44.
5. *Небалуев С. И.* Точные гомотопические последовательности в теории толерантных пространств // Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения: труды VI Международной конференции. Чебышевский сборник : Тула, 2004. T.V, вып. 3(11). С. 64–97.
6. *Небалуев С. И., Кляева И. А., Сусин М. Н.* Построение спектральной последовательности толерантного расслоения // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам : межвуз. сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2009. вып. 5. С. 94–118.

УДК 519.7

В. Е. Новиков

НЕКОТОРЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД ФОРМАЛЬНЫМИ КОНТЕКСТАМИ

В статье представлено исследование формальных контекстов с точки зрения их алгебраических преобразований. Если в предыдущих исследованиях [1, 2] формальный контекст рассматривался как некоторая фиксированная данность, то эта статья открывает исследование поведения структуры концептов при изменении содержания контекста, т. е. динамического процесса в контексте.

Восстановим некоторые определения концептуального анализа [3], обобщая их на контекст с $(n+1)$-арным отношением с помощью аппарата алгебры отношений В. В. Вагнера [4]. Будем говорить, что задан *формальный полиатрибутный контекст* $\mathbb{K} = (G, (M_i), \rho)$, если заданы G – непустое конечное *множество объектов*, (M_i) – семейство непустых конечных *множеств атрибутов* с множеством индексов $1 \leq i \leq n$, $\rho \subseteq G \times M_1 \times \ldots \times M_n$ – некоторое $(n+1)$-арное отношение. Под словом «контекст» далее будем понимать «полиатрибутный контекст».

Будем говорим, что контекст $\mathbb{K} = (G, (M_i), \rho)$ *однозначен относительно множества объектов*, или просто *однозначен*, если отношение ρ имеет F-зависимость $G \to M_{\bar{n}}$. Ранее было показано, что множество всех концептов однозначного контекста относительно упорядоченности по включению образует решётку. Для однозначного контекста $\mathbb{K} = (G, (M_i), \rho)$ обозначим через $L(\mathbb{K})$ решётку его концептов.

В [5] был рассмотрен способ минимизации семейства атрибутов контекста при сохранении с точностью до изоморфизма упорядоченного множества его концептов. В минимизированном однозначном контексте $\mathbb{K} = (G, (M_i), \rho)$, $1 \leq i \leq n$, может существовать один *общий атрибут* $a \in M_j$, т.е. атрибут, для которого выполняется равенство $\overset{\frown}{\rho}_j\,(G) = \{a\}$. Поскольку в этом случае атрибут a присущ всем объектам контекста, то он является несущественным, т.е. не выделяет никаких собственных концептов. А значит, множество атрибутов M_j в этом случае также можно удалить из контекста, не нарушая структуру концептов. Так преобразованные контексты будем называть контекстами без общего атрибута.

Соединение $\mathbb{K}_1 \rhd \lhd \mathbb{K}_2$ контекстов $\mathbb{K}_1 = (G, (A_i), \rho)$, $1 \leq i \leq n$, и $\mathbb{K}_2 = (G, (B_i), \varsigma)$, $1 \leq i \leq m$, определяется равенством

$$\mathbb{K}_1 \rhd \lhd \mathbb{K}_2 = (G, (M_i), \rho \rhd \lhd \varsigma), 1 \leq i \leq n+m,$$

где $M_i = A_i$ при $1 \leq i \leq n$, $M_i = B_{i-n}$ при $n+1 \leq i \leq n+m$, $\rho \rhd \lhd \varsigma = \bigcup\limits_{g \in G} (\rho) \times \varsigma_{\bar{m}}\langle g \rangle$. Таким образом, соединение контекстов определено для контекстов с один и тем же множеством объектов и равносильно тому, что к одному контексту добавляются множества атрибутов другого контекста, сохраняя атрибуты каждого объекта из второго контекста.

Объединение $\mathbb{K}_1 \cup \mathbb{K}_2$ контекстов $\mathbb{K}_1 = (G_1, (M_i), \rho)$ и $\mathbb{K}_2 = (G_2, (M_i), \varsigma)$ определяется равенством

$$\mathbb{K}_1 \cup \mathbb{K}_2 = (G_1 \cup G_2, (M_i), \rho \cup \varsigma),$$

где $G_1 \cup G_2$ и $\rho \cup \varsigma$ являются теоретико-множественными объединениями. Таким образом, объединение контекстов определено для контекстов с одним и тем же семейством атрибутов.

Следующие утверждения определяют условия устойчивости однозначных контекстов относительно операций соединения и объединения.

Теорема 1. *Справедливы следующие утверждения:*

1) если $\mathbb{K}_1 = (G, (A_i), \rho)$, $1 \le i \le n$, *и* $\mathbb{K}_2 = (G, (B_i), \varsigma)$, $1 \le i \le m$, *однозначные контексты, то* $\mathbb{K}_1 \rhd \lhd \mathbb{K}_2$ *также однозначный контекст;*

2) если $\mathbb{K}_1 = (G_1, (M_i), \rho)$ *и* $\mathbb{K}_2 = (G_2, (M_i), \varsigma)$ *однозначные контексты и* $\bigcup\limits_{g \in G_1 \cap G_2} (\sigma_{\{g\}}(\rho)) = \bigcup\limits_{g \in G_1 \cap G_2} (\sigma_{\{g\}}(\varsigma))$, *то* $\mathbb{K}_1 \cup \mathbb{K}_2$ *также однозначный контекст, в частности, если* $G_1 \cap G_2 = \emptyset$.

Следующие утверждения характеризуют решётки концептов соединения и объединения однозначных контекстов. Объединение решёток всюду рассматривается как объединение упорядоченных множеств.

Теорема 2. *Справедливы следующие утверждения:*

1) если $\mathbb{K}_1 = (G, (A_i), \rho)$, $1 \le i \le n$, *и* $\mathbb{K}_2 = (G, (B_i), \varsigma)$, $1 \le i \le m$, *однозначные контексты, то* $L(\mathbb{K}_1 \rhd \lhd \mathbb{K}_2) = L(\mathbb{K}_1) \cup L(\mathbb{K}_2)$*;*

2) если $\mathbb{K}_1 = (G_1, (M_i), \rho)$ *и* $\mathbb{K}_2 = (G_2, (M_i), \varsigma)$ *однозначные контексты без общего атрибута с условием* $G_1 \cap G_2 = \emptyset$, *то* $L(\mathbb{K}_1 \cup \mathbb{K}_2) = (L(\mathbb{K}_1) \setminus \{G_1\}) \cup (L(\mathbb{K}_2) \setminus \{G_2\}) \cup \{G_1 \cup G_2\}$.

Замечание. Второе утверждение означает, что решётка концептов объединения контекстов совпадает с решёточным объединением решёток концептов каждого из контекста, когда склеиваются только наибольший и наименьший элементы. Условие «без общего атрибута» во втором утверждении является существенным. Поскольку в объединении общий атрибут может исчезнуть как общий и выделить собственный концепт G_1 или G_2 в зависимости от того, в каком из контекстов он являлся общим. Добавление концептов G_1 или G_2 не разрушит решётки $L(\mathbb{K}_1 \cup \mathbb{K}_1)$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Новиков В. Е.* О концептуальном анализе на контексте с многомерными атрибутами // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2005. Вып. 7. С. 82–85.

2. *Новиков В. Е.* Теоретико-множественный подход к структуре генераторов концепта // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2009. Т. 9. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 3. С. 50–56.

3. *Ganter B., Wille R.* Formal Concept Analysis. Mathematical Foundatoins. Berlin : Springer Verlag, 1999.

4. *Вагнер В. В.* Теория отношений и алгебра частичных отображений // Теория полугрупп и её приложения. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1965. Вып. 1. С. 3–178.

5. *Новиков В. Е.* Концепты и функциональные зависимости // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2007. Вып. 9. С. 68–70.

УДК 519.682.1

А. А. Орел

О НЕКОТОРЫХ ВИДАХ ФАНТОМНЫХ ТИПОВ ДАННЫХ

В работе [1] предложено при конструировании фантомных типов данных использовать в качестве определяющего отношения отношение предпорядка, которому соответствует тип функциональной зависимости, представленный на языке Haskell конструктором типа (`->`). На основании рассмотренного отношения была решена задача статической проверки типов. Однако данное отношение не обладает свойством симметричности, что накладывает ограничения на область его применения. Фантомные типы данных, построенные на основе этого отношения, не позволяют, например, решить задачу динамической проверки типов [2]. Для решения такой задачи требуется реализация свойства рефлективности с помощью функции с сигнатурой `refl :: TE a b`, где `TE a b` - тип данных, соответствующий отношению эквивалентности, и реализация двух функций `from` и `to` с сигнатурами

`from :: TE a b -> a -> b` и `to :: TE a b -> b -> a`

Заметим, что при наличии свойства симметричности, реализуемого функцией `symm` с сигнатурой `symm :: TE a b -> TE b a`, достаточно иметь лишь одну из функций `from` или `to`, например `from`, так как `to` может быть получена как композиция `from . symm`.

Для определения базового типа `TE a b` можно воспользоваться отношением эквивалентности в виде `(A => B) & (B => A)`, реализуемым в силу изоморфизма Карри — Ховарда типом пары функциональных зависимостей `(a -> b, b -> a)` [3], или использовать на основе принципа Лейбница отношение эквивалентности в виде $\forall$ `f. f a -> f b` (см. [2]).

Рассмотрим другие возможности. В начале определим отношение эквивалентности с использованием альтернативы (|) в форме `(A | B) => (A & B)`. Соответствующий тип данных `TE a b` можно представить средствами языка Haskell в виде

```
type TE a b = Either a b -> (a, b)
```