крытия в играх с упорядоченными исходами // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2000. Вып. 2. С. 105–108.

2. *Розен В. В.* Условия единственности балансовой пары векторов // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2010. Вып. 12. С. 105–108.

УДК 517.927.25

В. С. Рыхлов

РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ОДНОГО ПУЧКА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим в пространстве $L_2[0,1]$ квадратичный пучок обыкновенных дифференциальных операторов второго порядка, определяемый однородным дифференциальным выражением

$$\ell(y,\lambda) := y'' + p_1\lambda y' + p_2\lambda^2 y \tag{1}$$

и двухточечными однородными краевыми условиями

$$U_\nu(y,\lambda) = U_{\nu 0}(y,\lambda) + U_{\nu 1}(y,\lambda) :=$$

$$:= \big(\alpha_{\nu 1}y'(0) + \lambda\alpha_{\nu 2}y(0)\big) + \big(\beta_{\nu 1}y'(1) + \lambda\beta_{\nu 2}y(1)\big) = 0, \quad \nu = 1,2, \tag{2}$$

где $p_j, \alpha_{\nu j}, \beta_{\nu j} \in \mathbb{C}$.

Пусть ω_1, ω_2 — корни характеристического уравнения $\omega^2 + p_1\omega + p_2 = 0$ и пусть выполняется основное предположение: *корни* ω_1, ω_2 *отличны от нуля и лежат на одном луче, исходящем из начала координат.* Не нарушая общности, можно считать, что $0 < \omega_1 < \omega_2$.

Обозначим далее $y_1(x,\lambda) = \exp(\lambda\omega_1 x)$, $y_2(x,\lambda) = \exp(\lambda\omega_2 x)$. Очевидно, функции y_1, y_2 образуют фундаментальную систему решений уравнения $\ell(x,\lambda) = 0$. Для определенности далее считаем $\alpha_{\nu 1} \neq 0$, $\beta_{\nu 1} \neq 0$. В остальных случаях рассуждения принципиально не отличаются. Обозначим $v_{\nu j} = U_{\nu 0}(y_j,\lambda)/\lambda = \alpha_{\nu 1}\omega_j + \alpha_{\nu 2}$, $w_{\nu j} = \exp(-\lambda\omega_j)U_{\nu 1}(y_j,\lambda)/\lambda = \beta_{\nu 1}\omega_j + \beta_{\nu 2}$, $V_j = (v_{1j}, v_{2j})^T$, $W_j = (w_{1j}, w_{2j})^T$, $\nu, j = 1,2$. Пусть $a_{sk} = \det(W_s, W_k)$, $a_{\bar{s}k} = \det(V_s, W_k)$, $a_{s\bar{k}} = \det(W_s, V_k)$, $a_{\bar{s}\bar{k}} = \det(V_s, V_k)$.

Характеристический определитель пучка имеет вид

$$\Delta(\lambda) = \det\big(U_\nu(y_j,\lambda)\big)_{\nu,j=1}^2 = \lambda^2\big(a_{\bar{1}\bar{2}} + e^{\lambda\omega_1}a_{1\bar{2}} + e^{\lambda\omega_2}a_{\bar{1}2} + e^{\lambda(\omega_1+\omega_2)}a_{12}\big).$$

Если $a_{\bar{1}\bar{2}} \neq 0$ и $a_{12} \neq 0$, то пучок (1),(2) является регулярным по Биркгофу [1, с. 66–67] и его функция Грина имеет оценку $O(\frac{1}{\lambda})$ вне кружков фиксированного радиуса около собственных значений. Если же $a_{\bar{1}\bar{2}} = 0$ или $a_{12} = 0$, то пучок (1),(2) будет сильно нерегулярным. Его функция Грина имеет экспоненциальный рост в углах раствора больше или равного π.

Рассмотрим задачу нахождения условий на параметры пучка (1)–(2) и на вектор-функцию $f = (f_0, f_1)^T \in L_1[0,1]$, при которых имеет место двукратная разложимость вектор-функции f в биортогональный ряд Фурье по производным цепочкам пучка (1),(2) (см. [1, с. 102]).

Эта задача интересна только для для сильно нерегулярного пучка (1),(2), так как в регулярном случае ввиду хорошей оценки функции Грина задача о разложении достаточно просто решается (см. [1, с. 124–129]).

В сильно нерегулярном случае обыкновенного дифференциального оператора 3-го порядка, когда корни $\{\omega_j\}$ лежат в вершинах правильного треугольника, задача о разложении решена в работе [2]. При этом на разлагаемую функцию накладывались очень сильные условия (и это по существу): аналитичность и удовлетворение некоторым функциональным соотношениям.

Рассмотрим далее конкретный пучок вида (1),(2), порожденный дифференциальным выражением

$$y'' - 3\lambda y' + 2\lambda^2 y \tag{3}$$

и краевыми условиями

$$\begin{cases} 3\lambda y(0) + y'(1) + \lambda y(1) &= 0, \\ y'(0) - 2\lambda y(0) &= 0. \end{cases} \tag{4}$$

Будем обозначать этот пучок $L(\lambda)$. Здесь $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 2$ и характеристический определитель имеет вид

$$\Delta(\lambda) = 3\lambda^2\big(1 + e^{2\lambda}\big).$$

То есть пучок $L(\lambda)$ является сильно нерегулярным.

Ненулевые собственные значения пучка являются нулями $\Delta(\lambda)$ и равны $\lambda_n = \frac{\pi}{2}i + \pi n i$, $n \in \mathbb{Z}$. То есть собственные значения простые. Пусть y_n есть собственная функция, соответствующая собственному значению λ_n. Тогда производная цепочка, соответствующая функции y_n имеет вид $\big(y_n, \lambda_n y_n\big)^T$.

Рассмотрим задачу на собственные значения $L(\lambda) = 0$ или подробно

$$y'' - 3\lambda y' + 2\lambda^2 y = 0, \tag{5}$$

$$\begin{cases} 3\lambda y(0) + y'(1) + \lambda y(1) &= 0, \\ y'(0) - 2\lambda y(0) &= 0. \end{cases} \tag{6}$$

Линеаризуем задачу (5),(6) следующим образом. Положим $v_0 = y$, $v_1 = \lambda v_0$. Тогда получим следующую задачу на собственные значения уже для линейного оператора $\hat{L}$, но в пространстве вектор-функций:

$$\begin{cases} v_1 &= \lambda v_0, \\ -\frac{1}{2}v_0'' + \frac{3}{2}v_1' &= \lambda v_1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3v_1(0) + v_0'(1) + v_1(1) &= 0, \\ v_0'(0) - 2v_1(0) &= 0. \end{cases}$$

Нетрудно показать, что собственные значения пучка $L(\lambda)$ и оператора $\hat{L}$ совпадают, а система производных цепочек пучка $L(\lambda)$ совпадает с системой собственных вектор-функций оператора $\hat{L}$.

Для формулировки основной теоремы потребуются компоненты резольвенты оператора $\hat{L}$. Введем соответствующие обозначения. Пусть

$$\left(\hat{L} - \lambda E\right)^{-1} f = \left(v_0(x, \lambda; f), v_1(x, \lambda; f)\right)^T,$$

где $f = (f_0, f_1)^T$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Если* $f_0'', f_1' \in L_1[0,1]$ *и*

$$f_0(0) = f_0(1) = f_0'(0) = f_0'(1) = f_1(0) = f_1(1) = 0,$$

то

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_\nu} v_0(x, \lambda; f)\, d\lambda = f_0(x) +$$

$$+ \left(f_0(x) - \tfrac{2}{3}f_0(2x-1) - 2F_1(x) + \tfrac{4}{3}F_1(2x-1)\right) + o(1) \text{ при } \nu \to \infty,$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_\nu} v_1(x, \lambda; f)\, d\lambda = f_1(x) +$$

$$+ \left(-2f_1(x) + \tfrac{4}{3}f_1(2x-1) + f_0'(x) - \tfrac{2}{3}f_0'(2x-1)\right) + o(1) \text{ при } \nu \to \infty,$$

где $F_1(x) = \int_0^x f_1(t)\, dt$, *а* Γ_ν *– круговой контур с центром в начале координат и радиуса* $\pi\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$.

Следствие 1. *Если функции* f_0 *и* f_1 *таковы, что выполняются условия теоремы и*

$$2f_1(x) \equiv f_0'(x),$$

то имеют место соотношения

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_\nu} v_0(x,\lambda;f)\,d\lambda = f_0(x)+o(1) \text{ при } \nu\to\infty,$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_\nu} v_1(x,\lambda;f)\,d\lambda = f_1(x)+o(1) \text{ при } \nu\to\infty.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00270) и гранта Президента РФ (проект НШ-4383.2010.1).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М., 1969. 528 с.

2. *Хромов А. П.* Разложение по собственным функциям одной краевой задачи третьего порядка // Исследования по теории операторов. : сб. науч. тр. Уфа, 1988. С. 182–193.

УДК 519.83

Т. Ф. Савина

О ПОЛНЫХ СЕМЕЙСТВАХ ГОМОМОРФИЗМОВ ИГР С ОТНОШЕНИЯМИ ПРЕДПОЧТЕНИЯ

Для игр с отношениями предпочтения вида $G = \langle (X_i)_{i\in N}, A, (\rho_i)_{i\in N}, F\rangle$ как для алгебраических систем [1] естественным образом введено понятие гомоморфизма [2]. Вопрос о сохранении оптимальных решений при переходе от одной игры с отношениями предпочтения к другой с помощью гомоморфизма был рассмотрен в работе [3] на базе условий ковариантности и контравариантности гомоморфизмов. В настоящей статье дано точное описание множества оптимальных решений [4] игры на основе полноты семейства гомоморфизмов.

Оптимальными решениями в игре являются ситуации равновесия и допустимые (вполне допустимые) исходы. Введем соответствующие определения.

Определение 1. Ситуация $x^0 = \left(x_i^0\right)_{i\in N} \in X$ в игре G называется

• *ситуацией общего равновесия*, если для каждого $i \in N$ и любых $x_i \in X_i$ выполнено условие $F(x^0 \parallel x_i) \overset{\rho_i}{\not>} F(x^0)$;

• *ситуацией равновесия по Нэшу*, если выполняется $F(x^0 \parallel x_i) \overset{\rho_i}{\lesssim} F(x^0)$.