УДК 517.518.85

А. Ю. Трынин

О НЕОБХОДИМЫХ И ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ РАВНОМЕРНОЙ И ПОТОЧЕЧНОЙ СХОДИМОСТИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ ПО «ВЗВЕШЕННЫМ» МНОГОЧЛЕНАМ ЯКОБИ

Пусть $\alpha_n > -1, \beta_n > -1$, тогда $\{P_n^{(\alpha_n,\beta_n)}\}_{n=0}^{\infty}$ – последовательность многочленов такая, что при каждом $n \in \mathbf{N}$ $P_n^{(\alpha_n,\beta_n)}$ есть классический ортогональный на отрезке $[-1,1]$ многочлен Якоби степени n [1, 2] для случая $\alpha = \alpha_n, \beta = \beta_n$. Сделаем стандартную замену переменной $x = \cos\theta$. Тогда дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют многочлены Якоби $P_n^{(\alpha_n,\beta_n)}$, с помощью преобразования Лиувилля [2, §1.8] приводятся к виду (смотрите, например [1, гл. VII., §3] или [2, §4.24, (4.24.2)])

$$u_n''(\theta) + \left\{ \frac{\frac{1}{4} - \alpha_n^2}{4\sin^2\frac{\theta}{2}} + \frac{\frac{1}{4} - \beta_n^2}{4\cos^2\frac{\theta}{2}} + \left(n + \frac{\alpha_n + \beta_n + 1}{2}\right)^2 \right\} u_n(\theta) = 0. \qquad (1)$$

Функции $u_n(\theta)$ представляют собой решения задачи Коши с этим уравнением и начальными условиями

$$u_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^{\alpha_n+\frac{1}{2}} \left(\cos\frac{\pi}{4}\right)^{\beta_n+\frac{1}{2}} P_n^{(\alpha_n,\beta_n)}\left(\cos\frac{\pi}{2}\right),$$

$$u_n'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{d}{d\theta}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha_n+\frac{1}{2}} \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{\beta_n+\frac{1}{2}} P_n^{(\alpha_n,\beta_n)}(\cos\theta)\Bigg|_{\theta=\frac{\pi}{2}}, \qquad (2)$$

где $P_n^{(\alpha_n,\beta_n)}$ классический многочлен Якоби степени n с параметрами α_n, β_n и стандартной нормировкой [2, гл. IV, §4.1, (4.1.1)]

$$P_n^{(\alpha_n,\beta_n)}(1) = \binom{n+\alpha_n}{n}. \qquad (3)$$

Заметим, что требование $\alpha_n > -1, \beta_n > -1$ обеспечивает суммируемость весовой функции классических ортогональных многочленов Якоби. В силу [2, теорема 4.23.2] при $\alpha_n \le -1$ или $\beta_n \le -1$ функции $P_n^{(\alpha_n,\beta_n)}$ являются многочленами только когда $\alpha_n \in \mathbf{Z}, \beta_n \in \mathbf{Z}$. Тем не менее аналитическое продолжение по α и β на всю действительную ось решений уравнения (1) возможно. Вид функции $P_n^{(\alpha_n,\beta_n)}$ в этом случае описывается формулой [2, (4.21.2)]. Договоримся считать, что функция $P_n^{(\alpha_n,\beta_n)}$ при

$\alpha_n > -1, \beta_n > -1$ есть классический многочлен Якоби, а в случае, когда выполняется хотя бы одно из условий $\alpha_n \le -1$ или $\beta_n \le -1$ $P_n^{(\alpha_n,\beta_n)}$, есть гипергеометрический ряд [2, (4.21.2)]. В обоих случаях используем стандартную нормировку (3) и называем функции $u_n(\theta)$ «взвешенными» многочленами Якоби.

Если не оговорено иное, считаем, что последовательности $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяют соотношениям

$$\alpha_n \in \mathbf{R}, \quad \beta_n \in \mathbf{R}, \quad \alpha_n = o\left(\sqrt{\frac{n}{\ln n}}\right), \quad \beta_n = o\left(\sqrt{\frac{n}{\ln n}}\right) \text{ при } n \to \infty. \tag{4}$$

Пусть $f \in C[a,b]$, где $[a,b] \subset (0,\pi)$. Доопределим функцию f на отрезок $[0,\pi]$ до непрерывной функции F следующим образом:

$$F(\theta) = \begin{cases} f(\theta) & \text{при } \theta \in [a,b], \\ 0 & \text{при } \theta \in [0,\pi] \setminus (\frac{3a}{4}, \frac{\pi+3b}{4}), \\ \text{линейная} & \text{при } \theta \in (\frac{3a}{4}, a) \text{ и } (b, \frac{\pi+3b}{4}). \end{cases} \tag{5}$$

В отличие от порядка многочлена $P_n^{(\alpha_n,\beta_n)}$ номер наибольшего из нулей решений задачи Коши (1) и (2) согласно нормировке [3, (1.6)] будем обозначать $\tilde{n} = \tilde{n}(\lambda)$. Поэтому определение оператора [3, (1.8)], построенного по решениям задачи Коши, выглядит так

$$S_{\lambda_n}^{(\alpha_n,\beta_n)}(f,\theta) = \sum_{k=0}^{\tilde{n}} \frac{u_n(\theta)}{u_n'(\theta_{k,\lambda_n})(\theta - \theta_{k,\lambda_n})} F(\theta_{k,\lambda_n}) = \sum_{k=0}^{\tilde{n}} s_{k,\lambda_n}(\theta) F(\theta_{k,\lambda_n}). \tag{6}$$

Исключив из рассмотрения тривиальный случай $f \equiv 0$, возьмём фиксированную положительнозначную последовательность $\{\vartheta_n\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющую условиям

$$\vartheta_n = o(1), \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\vartheta_n}{\omega(F, \frac{1}{n})} = \infty; \text{ положим } \quad \varepsilon_n = \exp\left\{-\frac{\vartheta_n}{\omega(F, \frac{1}{n})}\right\}. \tag{7}$$

Учитывая то, что в силу [3, предложение 5] и (1) на отрезке $[\frac{a}{2}, \frac{\pi+b}{2}]$ функция u_n имеет конечное число нулей $\theta_{k,n}$. Перенумеруем их в порядке возрастания, а их количество обозначим $\breve{n}+1 = \breve{n}(n,\alpha_n,\beta_n,a,b)+1$. Для любого натурального n и $\theta \in [a,b]$ обозначим через p, p_1, p_2, m_1 и m_2 такие целые числа, что имеют место соотношения

$$m_1 = \left[\frac{k_1}{2}\right] + 1, \quad m_2 = \left[\frac{k_2}{2}\right],$$

$$\theta_{p,n} \le \theta < \theta_{p+1,n}, \tag{8}$$

$$\theta_{p_1,n} \le a < \theta_{p_1+1,n}, \quad \theta_{p_2,n} \le b < \theta_{p_2+1,n},$$

где номера k_1 и k_2 определяются из неравенств

$$\theta_{k_1-1,n} < \theta - \varepsilon_n \le \theta_{k_1,n}, \quad \theta_{k_2,n} \le \theta + \varepsilon_n < \theta_{k_2+1,n}.$$

Обозначим последовательности

$$\eta_n = \eta_n(a, \alpha_n, \beta_n)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\frac{\frac14-\alpha_n^2}{4\sin^2\frac{a}{4}} + \frac{\frac14-\beta_n^2}{4\cos^2\frac{a}{4}} + \left(n+\frac{\alpha_n+\beta_n+1}{2}\right)^2}}{2\pi u_n'(\frac{a}{2})}, & \text{если } u_n(\frac{a}{2}) = 0, \\ \dfrac{\sqrt{\frac{\frac14-\alpha_n^2}{4\sin^2\frac{a}{4}} + \frac{\frac14-\beta_n^2}{4\cos^2\frac{a}{4}} + \left(n+\frac{\alpha_n+\beta_n+1}{2}\right)^2}}{2\pi\sqrt{\frac{\frac14-\alpha_n^2}{4\sin^2\frac{a}{4}} + \frac{\frac14-\beta_n^2}{4\cos^2\frac{a}{4}} + \left(n+\frac{\alpha_n+\beta_n+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{u_n'(\frac{a}{2})}{u_n(\frac{a}{2})}\right)^2}}, & \text{если } u_n(\frac{a}{2}) \ne 0 \end{cases} \tag{9}$$

и

$$\lambda_n = \lambda_n(a, b, \alpha_n, \beta_n)$$

$$= \left(\frac{\pi + (b-a)}{2\pi}\right)^2 \left\{ \frac{\frac14 - \alpha_n^2}{4\sin^2\frac{a}{4}} + \frac{\frac14 - \beta_n^2}{4\cos^2\frac{a}{4}} + \left(n + \frac{\alpha_n + \beta_n + 1}{2}\right)^2 \right\}. \tag{10}$$

После введённых обозначений сформулируем критерий сходимости в точке по «взвешенным» многочленам Якоби.

Теорема 1. *Пусть последовательности α_n, β_n удовлетворяют соотношениям (4), $f \in C[a,b]$, $[a,b] \subset (0,\pi)$. Доопределим функцию f до F на отрезке $[0,\pi]$, как в (5). Возьмём фиксированные положительнозначные последовательности $\{\vartheta_n\}_{n=1}^\infty$ и $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$, удовлетворяющие условиям (7). Числа m_1, m_2 и p выберем, чтобы выполнялись соотношения (8). Тогда для операторов вида (6), где в качестве решений задачи Коши берутся «взвешенные» многочлены Якоби $u_n(\theta)$, равномерно по θ на $[a,b]$ справедливо равенство*

$$\lim_{n\to\infty}\Big| S_{\lambda_n}^{(\alpha_n,\beta_n)}(F,\theta) - F(\theta) -$$

$$-\eta_n u_n(\theta) \cdot \sum_{m=m_1}^{m_2}{}' \frac{F(\theta_{2m+1,\lambda_n}) - 2F(\theta_{2m,\lambda_n}) + F(\theta_{2m-1,\lambda_n})}{p-2m} \Bigg| = 0, \qquad (11)$$

где последовательность $\eta_n = \eta_n(a, \alpha_n, \beta_n)$ определена (9), а штрих у суммы означает отсутствие слагаемого со знаменателем, равным нулю. Если $m_2 < m_1$ (смотрите (8)), то сумма в (11) равна нулю.

Справедлив также «глобальный» аналог теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть последовательности α_n, β_n удовлетворяют соотношениям (4), $f \in C[a,b]$, $[a,b] \subset (0,\pi)$. Доопределим функцию f до F на отрезке $[0,\pi]$, как в (5). Число p выберем, как в (8). Тогда для операторов вида (6), где в качестве решений задачи Коши берутся «взвешенные» многочлены Якоби $u_n(\theta)$, равномерно по θ на $[a,b]$ справедливо равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \Bigg| S_{\lambda_n}^{(\alpha_n,\beta_n)}(F,\theta) - F(\theta) -$$

$$-\eta_n u_n(\theta) \cdot \sum_{m=1}^{[\frac{\check{n}-1}{2}]}{}' \frac{F(\theta_{2m+1,\lambda_n}) - 2F(\theta_{2m,\lambda_n}) + F(\theta_{2m-1,\lambda_n})}{p-2m} \Bigg| = 0,$$

где последовательность $\eta_n = \eta_n(a, \alpha_n, \beta_n)$ определена (9), а штрих у суммы означает отсутствие слагаемого со знаменателем, равным нулю.

Доказательство теоремы 1 следует из [3, теорема 1] при условии (10), а утверждение теоремы 2 вытекает из [3, теорема 1] и [3, (4.36)] при условии (10).

Из теорем 1 и 2 следуют необходимые и достаточные условия приближения значениями оператора (6) функции $f \in C[a,b]$ в точке. Следующая теорема представляет собой критерий равномерной внутри $(0,\pi)$ сходимости значений операторов (6) по «взвешенным» многочленам Якоби. Заметим, что в случае, когда $\alpha_n \equiv \beta_n \equiv -\frac{1}{2}$, критерий равномерной сходимости классических интерполяционных многочленов Лагранжа по матрице Чебышёва на всём отрезке $[-1,1]$ получен А. А. Приваловым в [4].

Теорема 3. *Пусть последовательности α_n, β_n удовлетворяют соотношениям (4), $f \in C[a,b]$, $[a,b] \subset (0,\pi)$. Доопределим функцию f до F на отрезке $[0,\pi]$, как в (5). Возьмём фиксированные положительнозначные последовательности $\{\vartheta_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющие условиям (7). Для любого натурального n и $\theta \in [a,b]$ обозначим числа p, p_1, p_2, m_1 и m_2, как в (8). Тогда, для того чтобы операторы вида (6), где в качестве решений задачи Коши берутся «взвешенные»* *многочлены Якоби $u_n(\theta)$, равномерно по θ на $[a,b]$ аппроксимировали функцию $f \in C[a,b]$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\lim_{n\to\infty}\max_{p_1\le p\le p_2}\Big|\sum_{m=m_1}^{m_2}{}' \frac{F(\theta_{2m+1,\lambda_n})-2F(\theta_{2m,\lambda_n})+F(\theta_{2m-1,\lambda_n})}{p-2m}\Big|=0, \qquad (12)$$

или эквивалентное ему условие

$$\lim_{n\to\infty}\max_{p_1\le p\le p_2}\Big|\sum_{m=1}^{[\frac{\check{n}-1}{2}]}{}' \frac{F(\theta_{2m+1,\lambda_n})-2F(\theta_{2m,\lambda_n})+F(\theta_{2m-1,\lambda_n})}{p-2m}\Big|=0,$$

где штрих у сумм означает отсутствие слагаемого со знаменателем, равным нулю. Если $m_2 < m_1$, то сумма в (12) равна нулю.

Доказательство теоремы 3 следует из [3, теорема 2] при условии (10).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Суетин П. К.* Классические ортогональные многочлены. М. : Наука, 1976.
2. *Сегё Г.* Ортогональные многочлены. М. : Физматгиз, 1962.
3. *Трынин А. Ю.* Обобщение теоремы отсчётов Уиттекера — Котельникова — Шеннона для непрерывных функций на отрезке // Математический сборник. 2009. Т. 200, № 1, С. 61–108.
4. *Привалов А. А.* Критерий равномерной сходимости интерполяционных процессов Лагранжа // Известия вузов. Сер. Математика. 1986. Вып. 5. С. 49–59.

УДК 517.518

Р. Н. Фадеев

ОЦЕНКИ НАИЛУЧШИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ПО МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ СИСТЕМАМ В НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Пусть $\{p_j\}_{j=1}^{\infty}$ – последовательность натуральных чисел, такая что $2 \le p_j \le P$ для всех $j \in \mathbb{N}$ и $Z_j = \{0,1,...,p_j-1\}$. Если $m_0 = 1$, $m_j = m_{j-1}p_j$ при $j \in \mathbb{N}$, то каждое $x \in [0,1)$ имеет разложение $x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j m_j^{-1}$, $x_j \in Z_j$. Это разложение определено однозначно, если при $x = k/m_n$, $0 < k < m_n$, $k,n \in \mathbb{Z}_+$, брать разложение с конечным числом $x_j \ne 0$. Каждое $k \in \mathbb{Z}_+$ однозначно представимо в виде $k = \sum_{j=1}^{\infty} k_j m_{j-1}$, $k_j \in \mathbb{Z}_j$. Для чисел $x \in [0,1)$ и $k \in \mathbb{Z}_+$ положим по