многочлены Якоби $u_n(\theta)$, равномерно по θ на $[a,b]$ аппроксимировали функцию $f \in C[a,b]$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{n\to\infty} \max_{p_1\le p\le p_2} \Big| {\sum_{m=m_1}^{m_2}}' \frac{F(\theta_{2m+1,\lambda_n}) - 2F(\theta_{2m,\lambda_n}) + F(\theta_{2m-1,\lambda_n})}{p-2m} \Big| = 0, \qquad (12)$$

или эквивалентное ему условие

$$\lim_{n\to\infty} \max_{p_1\le p\le p_2} \Big| {\sum_{m=1}^{[\frac{\check{n}-1}{2}]}}' \frac{F(\theta_{2m+1,\lambda_n}) - 2F(\theta_{2m,\lambda_n}) + F(\theta_{2m-1,\lambda_n})}{p-2m} \Big| = 0,$$

где штрих у сумм означает отсутствие слагаемого со знаменателем, равным нулю. Если $m_2 < m_1$, то сумма в (12) равна нулю.

Доказательство теоремы 3 следует из [3, теорема 2] при условии (10).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Суетин П. К.* Классические ортогональные многочлены. М. : Наука, 1976.

2. *Сегё Г.* Ортогональные многочлены. М. : Физматгиз, 1962.

3. *Трынин А. Ю.* Обобщение теоремы отсчётов Уиттекера — Котельникова — Шеннона для непрерывных функций на отрезке // Математический сборник. 2009. Т. 200, № 1, С. 61–108.

4. *Привалов А. А.* Критерий равномерной сходимости интерполяционных процессов Лагранжа // Известия вузов. Сер. Математика. 1986. Вып. 5. С. 49–59.

УДК 517.518

Р. Н. Фадеев

ОЦЕНКИ НАИЛУЧШИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ПО МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ СИСТЕМАМ В НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Пусть $\{p_j\}_{j=1}^{\infty}$ – последовательность натуральных чисел, такая что $2 \le p_j \le P$ для всех $j \in \mathbb{N}$ и $Z_j = \{0, 1, ..., p_j - 1\}$. Если $m_0 = 1$, $m_j = m_{j-1}p_j$ при $j \in \mathbb{N}$, то каждое $x \in [0,1)$ имеет разложение $x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j m_j^{-1}$, $x_j \in Z_j$. Это разложение определено однозначно, если при $x = k/m_n$, $0 < k < m_n$, $k, n \in \mathbb{Z}_+$, брать разложение с конечным числом $x_j \neq 0$. Каждое $k \in \mathbb{Z}_+$ однозначно представимо в виде $k = \sum_{j=1}^{\infty} k_j m_{j-1}$, $k_j \in \mathbb{Z}_j$. Для чисел $x \in [0,1)$ и $k \in \mathbb{Z}_+$ положим по определению $\chi_k(x) = \exp(2\pi i \sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j k_j/p_j)$. Система $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ ортонормированна и полна в $L[0,1)$. Поэтому можно определить коэффициенты Фурье формулой $\hat{f}(n) = \int_0^1 f(x)\overline{\chi_n(x)}\,dx$, $n \in \mathbb{Z}_+$, и частичную сумму $S_n(f)(x) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \hat{f}(i)\chi_i$, $n \in \mathbb{N}$.

Пусть $\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$ – норма в пространстве $L^p[0,1)$, $1 \leq$ $\leq p < \infty$. Зададим максимальную функцию $M(f)$ равенством $M(f)(x) = \sup\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} S_{m_n}(f)(x)$. Если $\|f\|_H = \|M(f)\|_1 < \infty$, то f принадлежит P-ичному пространству Харди $H\left(P,[0,1)\right)$ с нормой $\|.\|_H$. Пусть $\mathcal{P}_n = \{f \in L^1[0,1) : \hat{f}(k) = 0, k \geq n\}$ и $E_n(f)_p = \inf\{\|f - t_n\|_p : t_n \in \mathcal{P}_n\}$. Если $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1)} |f(x)|$, то пространство $C^*[0,1)$ состоит из ограниченных функций со свойством $\lim\limits_{h\to 0} \|f(.\oplus h) - f(.)\|_\infty = 0$. Для $f \in C^*[0,1)$, $f \in H\left(P,[0,1)\right)$, величины $E_n(f)_\infty$, $E_n(f)_H$ определяются как $E_n(f)_p$.

По определению $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in GM$, если для всех $n \in \mathbb{N}$ верно неравенство $\sum\limits_{k=n}^{2n-1} |a_k - a_{k+1}| \leq Ca_n$. Ясно, что класс GM содердит в себе класс $RBVS$ последовательностей, удовлетворяющих условию $\sum\limits_{k=n}^{\infty} |a_k - a_{k+1}| \leq$ $\leq Ca_n$. Возрастающая последовательность $\{n_k\}_{k=0}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ называется *лакунарной по Адамару*, если $n_{k+1}/n_k \geq \lambda > 1$ при всех $k \in \mathbb{Z}_+$.

Теорема 1. *Пусть $1 < p < \infty$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in GM$ и $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i^p i^{p-2} < \infty$. Тогда ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i\chi_i(x)$ является рядом Фурье функции $f \in L^p[0,1)$ и имеют место оценки*

$$E_n(f)_p \leq C\left(n^{1-1/p}a_n + \left(\sum_{i=n}^{\infty} a_i^p i^{p-2}\right)^{1/p}\right), \tag{1}$$

$$n^{1-1/p}a_n + E_n(f)_p \geq C\left(\sum_{i=n}^{\infty} a_i^p i^{p-2}\right)^{1/p}. \tag{2}$$

При $p \geq 2$ можно убрать $n^{1-1/p}a_n$ в правой части (1), а при $1 < p \leq 2$ это выражение можно убрать из левой части (2).

Теорема 2. *Пусть $1 \leq p < \infty$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 < \infty$ и $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\chi_{n_k}(x)$,* *где* $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ – *лакунарная последовательность. Тогда*

$$C_1(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2)^{1/2} \leq \|f\|_p \leq C_2(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2)^{1/2},$$

$$C_1(\sum_{n_k \geq n} |a_k|^2)^{1/2} \leq E_n(f)_p \leq C_2(\sum_{n_k \geq n} |a_k|^2)^{1/2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 3. 1) *Пусть* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 < \infty$ *и* $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \chi_{n_k}(x)$, *где* $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ – *лакунарная последовательность. Тогда*

$$C_1(\sum_{n_k \geq n} |a_k|^2)^{1/2} \leq E_n(f)_H \leq C_2(\sum_{n_k \geq n} |a_k|^2)^{1/2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

2) *Пусть* $f \in C^*[0,1)$ *и имеет ряд Фурье* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \chi_{n_k}$, *где* $a_k \geq 0$, $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ – *лакунарная последовательность . Тогда*

$$C_3 \sum_{n_k \geq n} a_k \leq E_n(f)_\infty \leq C_4 \sum_{n_k \geq n} a_k.$$

Замечание. Теорема 1 является уточнением некоторых результатов из [2]. Неравенства теоремы 2 хорошо известны в тригонометрическом случае, но для мультипликативных систем левые неравенства теоремы 2 в явном виде не формулировались. Пункт 2) теоремы 3 является аналогом теорем 4 и 5 из работы С. Б. Стечкина [3].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша. М. : Наука, 1987.

2. *Агафонова Н. Ю.* О наилучших приближениях функций по мультипликативным системам и свойствах их коэффициентов Фурье // Analysis Math. 2007. Vol. 33, № 4. С. 247–262.

3. *Стечкин С. Б.* Об абсолютной сходимости рядов Фурье (третье сообщение)// Известия АН СССР. Сер. математическая. 1956. Т. 20, № 3. С. 385–412.