УДК 517.984

А. Е. Федосеев

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ОСОБЕННОСТЬЮ

В данной статье исследуется обратная задача спектрального анализа для обыкновенных дифференциальных уравнений произвольных порядков на полуоси, имеющих неинтегрируемую особенность во внутренней точке. Получена теорема единственности решения обратной задачи.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\ell y(x) := y^{(n)}(x) + \sum_{j=0}^{n-2}\Big(\frac{\nu_j}{(x-a)^{n-j}} + q_j(x)\Big)y^{(j)}(x) = \lambda y(x),\ x > 0, \quad (1)$$

с неинтегрируемой особенностью в точке $0 < a < \infty$, где $q_j(x)$ – комплекснозначные функции и ν_j – комплексные числа. Ранее уравнение вида (1) при $a = 0$ рассматривалось в работе [1]. При $a > 0$ уравнение (1) на *конечном отрезке* рассматривалось в работах [2,3].

Пусть $\mu_1, \dots, \mu_n$ – корни характеристического многочлена

$$\Delta(\mu) = \sum_{j=0}^{n} \nu_j \prod_{k=0}^{j-1}(\mu - k), \quad \nu_n = 1,\ \nu_{n-1} = 0.$$

Для определенности будем считать, что $n = 2m$, $\mu_k - \mu_j \neq sn$, $s \in \mathbb{Z}$; $\mathrm{Re}\mu_1 < \ldots < \mathrm{Re}\mu_n$, $\mu_k \neq 0, 1, 2, \dots, n-3$. Обозначим $\theta = \mathrm{Re}(\mu_n - \mu_1)$, $\theta_j = n - 1 - \theta - j$. Мы будем предполагать, что $q_j(x)|x-a|^{\theta_j} \in L(0,T)$ и $q_j(x) \in L(T,\infty)$ при $j = \overline{0, n-2}$ для некоторого $T > a$.

Пусть $\lambda = \rho^n$, $s_j(x,\lambda)$, $j = \overline{1,n}$, решение следующей системы интегральных уравнений при $x > a$ и $x < a$:

$$s_j^{(\nu)}(x,\lambda) = C_j^{(\nu)}(x,\lambda) - \int_a^x \frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu} g(x,t,\lambda)\Big(\sum_{p=0}^{n-2} q_p(t) s_j^{(p)}(t,\lambda)\Big)\,dt,\ \nu = \overline{0, n-1},$$

где $g(x,t,\lambda)$ – функция Грина следующей задачи Коши: $\ell_0 y - \lambda y = f(x)$, $y^{(\nu)}(a) = 0$, $\nu = \overline{0,n-1}$, $\ell y_0 = \ell y|_{q_j(x)\equiv 0, j=\overline{0,n-2}}$,

$$C_j(x,\lambda) = (x-a)^{\mu_j}\sum_{k=0}^{\infty} c_{jk}\Big(\rho(x-a)\Big)^{nk}, \quad c_{jk} = c_{j0}\Big(\prod_{s=1}^{k}\Delta(\mu_j + sn)\Big)^{-1}.$$

Здесь и далее считаем, что $z^{\mu} = e^{\mu(\ln|z| + i\arg z)}$, $\arg z \in (-\pi, \pi]$.

Пусть задана матрица $A = [a_{kj}]_{k,j=\overline{1,n}}$, $\det A \neq 0$, где a_{kj} – комплексные числа. Обозначим

$$\sigma_j(x, \lambda) = \begin{cases} s_j(x, \lambda), & x < a, \\ \sum\limits_{k=1}^{n} a_{kj} s_k(x, \lambda), & x > a. \end{cases}$$

Фундаментальная система решений $\{\sigma_j(x, \lambda)\}$ используется для склейки решений уравнения (1) в окрестности особой точки $x = a$. Будем говорить, что решение $y(x, \lambda)$ уравнения (1) удовлетворяет *условию склейки*, образованному матрицей A, если $y(x, \lambda)$ может быть представлено в виде

$$y(x, \lambda) = \sum_{j=1}^{n} \chi_j(\lambda) \sigma_j(x, \lambda) \ \text{ для всех } \ x \neq a,$$

где коэффициенты $\chi_j(\lambda)$ не зависят x.

Пусть $S_{k_0} = \left\{\rho : \arg\rho \in \left(\frac{k_0\pi}{n}, \frac{(k_0+1)\pi}{n}\right)\right\}$. В каждом секторе S_{k_0} корни R_k, $k = \overline{1,n}$, уравнения $R^n - 1 = 0$ могут быть занумерованы так, что

$$\operatorname{Re}(\rho R_1) < \operatorname{Re}(\rho R_2) < \ldots < \operatorname{Re}(\rho R_n), \ \rho \in S_{k_0}.$$

Рассмотрим случай, когда $a_{kj} = 0$ при $k < j$. Обозначим

$$[d_{jk}]_{j,k=\overline{1,n}} = \left([R_k^{\mu_j}]_{k,j=\overline{1,n}}\right)^{-1}, \quad \xi_{kj}^0 = \sum_{s=1}^{n} a_{ss} R_k^{\mu_s} d_{sj} e^{-i\pi\mu_s}.$$

Предположим, что

$$\xi_s^0 = \det[\xi_{kj}^0]_{k=\overline{1,s}; j=\overline{n-s+1,n}} \neq 0, \ s = \overline{1, n-1}. \tag{2}$$

Условие (2) называется *условием регулярности* склейки.

В работе [4] было показано, что в каждом секторе S_{k_0}, при $x > 0$, $x \neq a$ существует фундаментальная система решений $\{y_k(x, \rho)\}_{k=\overline{1,n}}$ дифференциального уравнения (1) такая, что для каждого $x < a$ и достаточно большого $\rho_* > 0$ функции $y_k^{(\nu)}(x, \rho)$, $\nu = \overline{0, n-1}$, аналитические по ρ при $\rho \in S_{k_0}$, $|\rho| \geq \rho_*$, непрерывные при $\rho \in \overline{S_{k_0}}$, $|\rho| \geq \rho_*$ и

$$|y_k^{(\nu)}(x, \rho)(-\rho R_k)^{-\nu} e^{-\rho R_k(a-x)} - 1| \leq C\left(|\rho(x-a)|^{-1} + |\rho|^{-\delta_0}\right),$$

при $x < a$, $\rho \in \overline{S_{k_0}}$, $|\rho(x - a)| \geq 1$, где $\delta_0 := \min(1, \theta)$.

Положим

$$\Delta_j(\rho) = \det[y_k(0,\rho), \ldots, y_k^{(j-1)}(0,\rho), \xi_{kj+1}^+(\rho), \ldots, \xi_{kn}^+(\rho)]_{k=\overline{1,n}}^T, j = \overline{1, n-1},$$

$$\Delta_n(\rho) = \det[y_k^{(\nu-1)}(0,\rho)]_{k,\nu=\overline{1,n}},$$

где $\xi_{ks}^+(\rho)$ определены в [4] и обладают асимптотическим представлением

$$\xi_{ks}^+ = \xi_{ks}^0 + O(\rho^{-\delta_1}), \quad |\rho| \to \infty, \quad \delta_1 = \min(1, \min_l \mathrm{Re}(\mu_{l+1} - \mu_l)).$$

Обозначим $G_{\delta,j} := \{\rho : |\rho - \rho_{lj}| \geq \delta\}$, где ρ_{lj} — нули функции $\Delta_j(\rho)$.

Пусть $\Phi_j(x,\lambda)$, $j = \overline{1,n}$, — решения уравнения (1) при условиях

$$\Phi_j^{(\nu-1)}(0,\lambda) = \delta_{\nu j},\ \nu = \overline{1,j}, \quad \Phi_j(x,\lambda) = O(e^{\rho R_j x}),\ x \to \infty,\ j = \overline{1,n},\ \rho \in S_{k_0},$$

и удовлетворяющие условиям склейки, образованными матрицей A.

Теорема 1. *При* $|\rho(x-a)| \geq 1$, $\rho \in \overline{S_{k_0}} \cap G_{\delta,j}$, $|\rho| \to \infty$, $j,\nu = \overline{1,n}$, *имеют место оценки*

$$|\Phi_j^{(\nu-1)}(x,\lambda)| \leq C|\rho^{\nu-j} e^{\rho R_j x}|.$$

Пусть $M(\lambda) = [M_{jk}(\lambda)]_{j,k=\overline{1,n}}$, $M_{jk}(\lambda) = \Phi_j^{(k-1)}(0,\lambda)$, $1 \leq j < k \leq n$, $M_{jk}(\lambda) := \delta_{jk}$ при $j \geq k$. Будем называть $M(\lambda)$ матрицей Вейля.

Обратная задача ставится следующим образом. По заданной матрице Вейля $M(\lambda)$ нужно восстановить числа ν_j и функции $q_j(x)$ в уравнении (1).

Теорема 2. *Задание матрицы Вейля $M(\lambda)$ однозначно определяет дифференциальное уравнение* (1).

Для доказательства используется метод спектральных отображений [5] и теорема 1.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Юрко В. А.* Обратная задача для дифференциальных уравнений с особенностью // Дифференциальные уравнения. 1992 Т. 28, № 8. С. 1355–1362.

2. *Yurko V. A.* Integral transforms connected with higher-order differential operators with a singularity // Integral Transforms and Special Functions. 2002. Vol. 13, №6. P. 497–511.

3. *Yurko V. A.* Higher-order differential equations having a singularity in an interior point // Results in Mathematics. 2002. Vol.42. C. 177–191.

4. *Fedoseev A.* Higher-order differential equations on the half-line having a singularity in an interior point / Preprint. Schriftenreihe der Fakultät für Mathematik. Universität Duisburg-Essen, SM-DU-734. 2011. 12p.

5. *Юрко В. А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М. : Физматлит, 2007.