механики конструкций, взаимодействующих с агрессивными средами»: март 2000, Саратов. 2000. С. 82-89.

12. *Контарев А,А., Маркушин А.Г., Садовничая Е.В.* Метод дополнительных деформаций в решении задачи истечения сыпучего тела // Материалы межвузовской научной конференции «Современные проблемы нелинейной механики конструкций, взаимодействующих с агрессивными средами»: март 2000, Саратов. 2000. С. 89-102.

13. *Маркушин А.Г.* К разработке динамической теории сыпучего тела с твердым зерном // Аэродинамика. Вып. 15 (18). Саратов: Изд. Сарат. ун-та. 2001. С. 96.

14. *Маркушин А.Г.* Квазистатический подход в решении задачи истечения сыпучего тела с твердым зерном // Межвуз. научн. сб. «Проблемы прочности элементов конструкций под действием нагрузок и рабочих сред». Саратов: Изд. СГТУ, 2004. С. 136

УДК 531.381
531.395

В.Ю. Ольшанский, Д.С. Степаненко

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ КВАДРАТИЧНОГО ИНТЕГРАЛА И ПРИВОДИМОСТЬ ИЗМЕНЯЕМОЙ СИСТЕМЫ С ДИНАМИЧЕСКОЙ СИММЕТРИЕЙ В ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ

Рассматривается движение механической системы постоянного состава и изменяемой конфигурации в центральном поле. Если размеры системы значительно меньше расстояния до центра поля, то для описания движения можно использовать систему [1]

$$y^{\bullet} = y \times x + p g_3 \times J g_3, \ g_i^{\bullet} = g_i \times (x - \Omega), \ i = 1, 2, 3. \tag{1}$$

Здесь $J(t)$ — оператор инерции системы в ее центре масс, $()^{\bullet}$ — производная по времени в главной системе отсчета, $y = Jx + K$, x — угловая скорость главной системы отсчета, $K(t)$ — кинетический момент движения относительно главной системы отсчета, $g_1, \ g_2, \ g_3, \ \Omega$ — орты и угловая скорость орбитальной системы отсчета, $\Omega = k_2 g_2 + k_3 g_3$, $p = p(r)$.

При изучении движения системы изменяемой конфигурации и состава без динамической симметрии в центральном поле получены [1] необходимые и достаточные условия существования квадратичного интеграла. Показано, в частности, что для существования интеграла необходимо, чтобы траектория центра масс находилась на поверхности некоторого фиксированного в инерциальном пространстве кругового конуса с вершиной в центре силового поля.

Для случая динамической симметрии $A_1 = A_2 \neq A_3$ (A_i — собственные значения оператора J) доказано следующее утверждение.

Теорема. *Для существования квадратичного интеграла необходимо, чтобы траектория центра масс находилась на поверхности кругового конуса с вершиной в центре поля. В случае, когда траектория не совпадает* *с образующей конуса и кинетический момент K не колинеарен оси динамической симметрии, может существовать только один квадратичный интеграл при выполнении необходимых и достаточных условий:*

1) $k_3 = c_1 k_2$, 2) $k_2 = \mathrm{constp}^{1/2}$, 3) $J = (p_0/p)^{1/2} J_0$,

4) $K_1 = K_э \cos\theta$, $K_2 = K_э \sin\theta$, $K_э = \mathrm{const}$,

5) $\theta^\bullet = A_3^{-1} K_3 + \mathrm{const}/\mathrm{p}^{1/2}$.

Здесь J_0 — постоянный в главной системе отсчета оператор, K_i — компоненты K в главной системе отсчета. Квадратичный интеграл в данном случае можно записать в одной из форм:

$$p^{-1/2}[(Jx, x) - 2(Jx + K, \Omega) + p(g_3, Jg_3) + 2\theta^\bullet A_3 x_3 + A_3(\theta^\bullet)^2] = \mathrm{const}; \quad (2)$$

$$p^{-1/2}[A_1(x_1^2 + x_2^2) + A_3(x_3 + \theta^\bullet)^2 - 2(Jx + K, \Omega) + p(g_3, Jg_3)] = \mathrm{const}. \quad (3)$$

Доказательство. Произвольный квадратичный интеграл ОДС можно записать в виде

$$(y, Fy) + \sum_{i=1}^{3}[(g_i, P_i g_i) + (Q_i y, g_i) + (n_i, g_i))] + (m, y) + h(t) + \Sigma(R_i g_j, g_k) = \mathrm{const}. \quad (4)$$

Дифференцируя интеграл (4) в силу системы (1) получим тождество, приведенное в [1]. Как и прежде (см. [1]), проверяем утверждение: операторы P_1, P_2, R_i ($i = 1,2,3$) пропорциональны тождественному оператору E, $Q_i = \nu_i E$, $\nu_1 = 0$. Интеграл (4) записывается в виде

$$(y, Fy) + (g_3, P_3 g_3) + (y, \nu_2 g_2 + \nu_3 g_3) + \Sigma(n_i, g_i) + (m, y) + h = \mathrm{const} \quad (5)$$

Основное тождество принимает вид

$$(2Fy + m, y \times x + pg_3 \times Jg_3) + p\nu_2(g_1, Jg_3) + (2P_3 g_3 + n_3, g_3, x) + k_2(2P_3 g_3 + n_3, g_1) +$$

$$+(n_2, g_2, x) - k_3(n_2, g_1) - (n_1, g_1, x) - k_2(n_1, g_3) + k_3(n_1, g_2) + (\nu_3 k_2 - \nu_2 k_3)(y, g_1) +$$

$+$

$$(y, F^\bullet y) + (g_3, P_3^\bullet g_3) + (y, \nu_2{}^\bullet g_2 + \nu_3{}^\bullet g_3) + \Sigma(n_i{}^\bullet, g_i) + (m^\bullet, y) + h^\bullet \equiv 0. \quad (6)$$

Выделяя в тождестве слагаемые с x_3, получим, что оператор F должен иметь вид $F = \psi_1 J^{-1} + \psi_2 E$; выделяя слагаемые с $xg_3{}^2$, получим, что оператор P_3 можно представить в виде $P_3 = p(\psi_1 J - \psi_2 A_1 A_2 A_3 J^{-1})$. Анализ членов с $g_3{}^2$ приводит к необходимости постоянства оператора P_3 в базисе E_3 и представлению параметра m в виде $m = -2FK + \lambda e_3$. Слагаемые в тождестве

(6), содержащие g_1g_3, обращаются в ноль только при выполнении условий $\nu_2 = -2k_2\psi_1$, $k_2\psi_2 = 0$. Требуя обращения в ноль свободного члена в тождестве (6), покажем, что справедливо следующее представление

$$(y, Fy) + (m, y) + h(t) = (Jx, FJx) + \lambda A_3 x_3 + \int_0^t \lambda K_3^\bullet \, d\xi + \mathrm{const}. \qquad (7)$$

Анализ слагаемых с $g_i x$ приводит к необходимости условий

$$n_1 = 0, \; k_3\nu_2 = k_2\nu_3, \; n_2 = 0, \; n_3 = 0, \; \nu_2^\bullet = 0, \; \nu_3^\bullet = 0.$$

Случай $k_2 \equiv 0$ соответствует движению центра масс по прямой, проходящей через центр поля, исключая здесь этот случай, при $k_2 \neq 0$ получим

$$\nu_i = -2k_i\psi_1, \; k_i\psi_1 = \mathrm{const}, \; \mathrm{i} = 2, 3, \; \mathrm{k}_3 = \mathrm{c}_1\mathrm{k}_2.$$

Отсюда следует (см. [1]), что $\Omega = k_2 a$, $(a)_0^\bullet = 0$ и траектория центра масс должна находиться на круговом конусе. Тождество (6) при учете полученных условий записывается в виде

$$(y, (\psi_1 J^{-1})^\bullet y) + \lambda(K, x, e_3) + ((-2\psi_1 J^{-1} K + \lambda e_3)^\bullet, y) + h^\bullet \equiv 0. \qquad (8)$$

Выделив слагаемые с x^2, получим условия

$$\psi_1 = c_2 p^{-1/2}, \; J = (p_0/p)^{1/2} J_0, \; k_2 = \mathrm{constp}^{1/2}.$$

Приравнивая нулю слагаемые с x, получим условия $\lambda^\bullet A_3 = 2\psi_1 K_3^\bullet$, $\lambda K_2 + 2\psi_1 K_1^\bullet = 0$, $\lambda K_1 - 2\psi_1 K_2^\bullet = 0$. Отсюда следует, что $(K_1)^2 + (K_2)^2 = (K_э)^2 = \mathrm{const}$ и можно положить $K_1 = K_э cos\theta$, $K_2 = K_э sin\theta$. При $K_э \neq 0$ получаем условие 5 теоремы. Свободный член в тождестве (8) обращается в ноль. Пусть $K_э \neq 0$, тогда

$$\int_0^t \lambda K_3^\bullet \, d\xi = \int_0^t \lambda\lambda^\bullet/(2\psi_1) A_3 \, d\xi =$$

$$= A_3/(4\psi_1) \int_0^t (\lambda^\bullet)^2 \, d\xi = A_3\lambda^2/(4\psi_1) + C = A_3\psi_1(\theta^\bullet)^2 + C. \qquad (10)$$

Интеграл (5) при учете представления (7) теперь можно представить в одной из форм (2) или (3). Теорема доказана.

Отметим, что переходя к переменным $d\tau = p^{1/2} dt$, $x = p^{1/2} z$, систему (1) можно привести к виду

$$dy/d\tau = y \times z + (p_0)^{1/2} g_3 \times J_0 g_3, \; dg_i/d\tau = g_i \times (x - \Omega_a),$$

$$\Omega_a = c_3(g_2 + c_1 g_3), i = 1, 2, 3 \quad (9)$$

Здесь $y = Jx + K = (p_0)^{1/2} J_0 z + K$, и при $K = \mathrm{const}$ система (9) становится автономной [2-4].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Ольшанский В.Ю.* Квадратичные интегралы и приводимость уравнений движения сложной механической системы в центральном поле // Прикладная математика и механика. Т.65, вып. 1. 2001. С. 36-50.
2. *F.de Brun.* Rotation kring en fix punkt. Ofversigt of Kongl Svenska Vetenskaps — Akademiens Vorhandlingar. Stookholm. 1893.
3. *Koob G.* Sur le probleme de la rotation d un corps autour d un point fixe. Bulletin de la Societe Mathematique. 1895. V. 23.
4. *Харламова Е.И.* О движении твердого тела вокруг неподвижной точки в центральном ньютоновском поле сил. Изв. Сибир. отд. АН СССР. 1959. №6.

УДК 629

И.А. Панкратов, Ю. Н. Челноков

К ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОЙ В СМЫСЛЕ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ ПЕРЕОРИЕНТАЦИИ КРУГОВОЙ ОРБИТЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

В [1] было показано, что в случае переориентации круговой орбиты космического аппарата (КА) исходная дифференциальная краевая задача оптимального управления, имеющая размерность, равную 10, может быть сведена (в случае быстродействия) к краевой задаче размерности 3, описываемой дифференциальными уравнениями линии переключения

$$\frac{d\nu_1}{d\varphi} = \nu_2,\ \frac{d\nu_2}{d\varphi} = -\nu_1 + \kappa\nu_3,\ \frac{d\nu_3}{d\varphi} = -\kappa\nu_2, \quad (1)$$

где $\kappa = \frac{r^2}{c}u,\ r = p_{or} = const$.

В уравнениях (1) r — модуль радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$ центра масс КА, c — постоянная площадей, φ — истинная аномалия, p_{or} — параметр орбиты, управление u — алгебраическая величина реактивного ускорения, перпендикулярного плоскости орбиты КА ($-u_{max} \le u \le u_{max}$); ν_j — переменные, связанные с фазовой кватернионнной переменной $\boldsymbol{\lambda}$ и сопряжённой кватернионной переменной $\boldsymbol{\mu}$ соотношением $\boldsymbol{\nu} = vect(\tilde{\boldsymbol{\lambda}} \circ \boldsymbol{\mu})$.

Так как переменные $\nu_k, k = 1, 2, 3$ есть функции сопряжённых переменных, то их начальные значения ν_{k0} неизвестны. Для их нахождения было проанализировано аналитическое решение системы (1) на различных участках управляемого движения. Был найден период T функции переключения управления:

$$T = 2[\pi \pm 2\arcsin(-D/a)]/k,$$