Согласно [1] для функций $f(x) \in M$ и только для них выполняется сходимость
$$\| -rR_r f - f\|_C \to 0 \quad \text{при} \quad r \to \infty. \tag{1}$$

Теперь применим операторы $-rR_r$ к функции $f_\delta(x)$ и рассмотрим величину
$$\Delta(\delta, -rR_r, f) \equiv \sup\{\| -rR_r f_\delta - f\|_{C[0,1]} : \|f_\delta - f\|_{L_2} \le \delta\}.$$

Из общей теории некорректно поставленных задач, леммы 2 и сходимости (1) следует

Теорема. *Для любой $f(x) \in M$ сходимость*
$$\Delta(\delta, -rR_r, f) \to 0 \quad \textit{при} \quad \delta \to 0,\, r \to \infty$$
выполняется тогда и только тогда, когда $r = r(\delta)$ так, что $r(\delta) \to \infty$ и $(r(\delta))^{1/2}\delta \to 0$ при $\delta \to 0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00270) и гранта Президента РФ (проект НШ-4383.2010.1).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Хромов А. А., Хромова Г. В.* Приближение непрерывных функций с интегральными граничными условиями // Современные методы теории функций и смежные вопросы : материалы Воронежской зимней школы. Воронеж, 25 янв. – 4 февр. 2011 г. Воронеж : Издательско-полиграфический центр Воронежского университета, 2011. С. 345.

УДК 517.51

Г. В. Хромова

О СХОДИМОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЙ ФУНКЦИИ С «РАЗМАЗАННЫМ» ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ

В [1] доказана сходимость одного метода приближения непрерывной функции с интегральным условием:
$$U(f) = \int_0^1 p(t)f(t)dt = 0, \tag{1}$$
где $p(t) \in C^1[0,1]$, $p(1) \ne 0$ и при этом
$$\int_0^1 p(t)dt \ne 0. \tag{2}$$

В данной статье снято ограничение (2). Указанный выше метод конструируется с помощью семейства операторов вида $-rR_r(L)$, где $R_r(L)$ – резольвента оператора дифференцирования с граничным условием (1), $r > 0$ – спектральный параметр. Условие (2) является ключевым в доказательстве сходимости.

$$|| - rR_r f - f||_c \to 0 \quad \text{при} \quad r \to \infty \tag{3}$$

для функций $f(x)$ из класса M, где

$$M = \{f(x) \in C[0,1] : U(f) = 0, U\prime(f) = 0\},$$

$$U\prime(f) = p(1)f(1) - p(0)f(0) - \int\limits_0^1 p'(t)f(t)dt.$$

Мы здесь ограничимся доказательством леммы, позволяющей получить сходимость (3), если $\int\limits_0^1 p(t)dt = 0$.

Лемма. *Если $p(t) \in C[0,1]$ и не равна тождественно нулю, то существует $\mu > 0$ такое, что*

$$\int\limits_0^1 p(t)e^{\mu t}dt \neq 0. \tag{4}$$

Доказательство. От противного: пусть интеграл в левой части (4) равен нулю при любом $\mu > 0$. Обозначи его через $F(\mu)$. По теореме единственности аналитической функции $F(\mu) = 0$ при любом комплексном μ. А по теореме единственности разложения в степенной ряд функции $F(\mu)$ коэффициенты этого ряда равны нулю, т.е. $\int\limits_0^1 p(t)t^k dt = 0,\ k = 0, 1, \ldots$ Значит, $\int\limits_0^1 p(t)P(t)dt = 0$, где $P(t)$ – любой многочлен.

По теореме Вейерштрасса, существует последовательность многочленов $P_n(t)$, сходящаяся к $p(t)$ в равномерной метрике. Из $\int\limits_0^1 p(t)P_n(t)dt = 0$ следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 p(t)P_n(t)dt = 0$. Отсюда получаем $\int\limits_0^1 p^2(t)dt = 0$, а значит, $p(t) = 0$, что противоречит условию леммы.

Отправляясь от этой леммы, мы повторяем схему доказательства теоремы о сходимости (3) в [1], заменяя всюду условие (2) условием (4), и приходим к теореме:

Теорема. *При* $p(t) \in C^1[0,1]$, $p(t) \neq 0$ *для сходимости (3) необходимо и достаточно, чтобы* $u \in M$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00270) и гранта Президента РФ (проект НШ-4383.2010.1).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Хромов А. А., Хромова Г. В.* Приближение непрерывных функций с интегральными граничными условиями // Современные методы теории функций и смежные вопросы : материалы Воронежской зимней школы. Воронеж, 25 янв. – 4 февр. 2011 г. Воронеж : Издательско-полиграфический центр Воронежского университета, 2011. С. 345.

УДК 517.518

Т. С. Чикина

ПРИБЛИЖЕНИЕ СРЕДНИМИ ЗИГМУНДА — РИССА В p-ВАРИАЦИОННОЙ МЕТРИКЕ

Пусть $1 < p < \infty$, $f(x)$ — измеримая, ограниченная, 2π−периодическая функция и $\xi = \{x_0 < x_1 < ... < x_n = x_0 + 2\pi\}$ – разбиение периода. Введем p-вариационную сумму $\varkappa_\xi^p(f) = (\sum\limits_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|^p)^{1/p}$, и p-вариационные модули непрерывности [1]:

$$\omega_{1-\frac{1}{p}}(f,\delta) = \sup_{|\xi|\leqslant\delta} \varkappa_\xi^p(f), \quad |\xi| = \max_{1\leqslant i\leqslant n}(x_i - x_{i-1}),$$

$$\omega_{k-\frac{1}{p}}(f,\delta) = \sup_{0<h\leqslant\delta} \omega_{1-\frac{1}{p}}(\Delta_h^{k-1} f(x), h), \quad k \in \mathbb{N}, \quad k \geqslant 2.$$

Здесь $\Delta_h^k f(x) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f(x+ih)$. Пространство C_p функций f, удовлетворяющих равенству $\lim\limits_{\delta\to 0+} \omega_{1-\frac{1}{p}}(f,\delta) = 0$, является банаховым с нормой $\|f\|_{C_p} = \max(\|f\|_\infty, \omega_{1-\frac{1}{p}}(f, 2\pi))$, где $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in R} |f(x)|$. Если $f(x)$ имеет ряд Фурье $a_0/2 + \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \cos ix + b_i \sin ix)$, то

$$Z_n^k(f)(x) = a_0/2 + \sum_{i=1}^{n} (1 - i^k/(n+1)^k)(a_i \cos ix + b_i \sin ix)$$