УДК 517.51

О. И. Шаталина

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТИПА КОЛМОГОРОВА — НИКОЛЬСКОГО ДЛЯ РЕГУЛЯРИЗУЮЩИХ ОПЕРАТОРОВ ТИХОНОВА

Пусть T_α — семейство операторов А. Н. Тихонова, построенных для приближения непрерывных функций при $r = 1$ [1].

Каждый из операторов T_α является интегральным с ядром

$$T_\alpha(x,t) = \frac{1}{\alpha} G(x,t,-\frac{1}{\alpha}), 0 \le x, t \le 1, \tag{1}$$

где

$$G(x,t,-\frac{1}{\alpha}) = \begin{cases} \frac{ch\alpha_1 t ch\alpha_1(1-x)}{\alpha_1 sh\alpha_1}, & t \le x, \\ \frac{ch\alpha_1 x ch\alpha_1(1-t)}{\alpha_1 sh\alpha_1}, & t > x. \end{cases}$$

и $\alpha_1 = \sqrt{\frac{1}{\alpha} + 1}$ [2].

Ранее доказано [3], что для любой непрерывной функции $u(x)$ имеет место сходимость $||T_\alpha u - u||_{C[0,1]} \to 0$, при $\alpha \to 0$.

Рассматривается класс функций

$$M_{B_n} = \{u \in C[0,1] : u(x) = \int_0^1 B_n(x,t)v(t)dt, \quad ||v||_{L_2} \le 1\},$$

где

$$B_n(x,t) = \begin{cases} \frac{(x-t)^n}{n!}, & t \le x, \\ 0, & t > x. \end{cases}$$

Для класса M_{B_n} и операторов T_α, определенных в (1), решается задача типа Колмогорова — Никольского. При $n = 1$ решение этой задачи получено в [4].

Рассматривается величина $\Delta_1(T_\alpha, M_{B_n})$, для которой берется представление [5]:

$$\Delta_1(T_\alpha, M_{B_n}) = \sup_{0 \le x \le 1} \left(\int_0^1 \left[\int_0^1 T_\alpha(x,\xi) B_n(\xi,t) d\xi - B_n(x,t) \right]^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Теорема. *Если* $B_n(x,t) = \begin{cases} \frac{(x-t)^n}{n!}, & t \le x, \\ 0, & t > x, n \in N, \end{cases}$ *то при достаточно малых* α *выполняется оценка*

$$\frac{1}{2n-1}\alpha^{\frac{1}{2}} - \psi_2(\alpha) \le \Delta_1(T_\alpha, M_{B_n}) \le \frac{1}{2n-1}\alpha^{\frac{1}{2}} + \psi_1(\alpha),$$

где $\psi_1(\alpha) = O(\alpha)$, $\psi_2(\alpha) = O(\alpha)$.

Доказательство. Доказательство теоремы разбито на несколько этапов. На первом вычисляется интеграл

$$J_n(t,x) = \int_0^1 T_\alpha(x,\xi) B_n(\xi,t) d\xi - B_n(x,t). \tag{2}$$

Лемма. *Справедливо рекуррентное соотношение*

$$J_{n+1} = J_n + A_n,$$

где

$$A_n = \begin{cases} \frac{(x-t)^{2n}}{\alpha_1^2 (2n)!} - \frac{ch\alpha_1 x}{\alpha_1 sh\alpha_1} \frac{(1-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}, & t \le x, \\ -\frac{ch\alpha_1 x}{\alpha_1 sh\alpha_1} \frac{(1-t)^{(2n+1)}}{(2n+1)!}, & t > x. \end{cases}$$

Доказательство. Для J_1 лемма доказывается непосредственными вычислениями, а затем, используя метод математической индукции, получаем утверждение леммы.

Возвращаемся к доказательству теоремы.

Так как $B_n(x,t)$ зависит от n, то при последовательном применении метода интегрирования по частям результат отличается при четных и нечетных значениях. Кроме того, отдельно необходимо рассмотреть случаи при $t \le x$ и $t > x$.

В каждом из рассматриваемых случаев группируются слагаемые при различных степенях α_1 и выделяются главные члены асимптотики по α_1.

Далее вычисляется интеграл

$$\tilde{J}(x) = \int_0^1 J_n^2(t,x) dt = \int_0^x J_n^2(t,x) dt + \int_x^1 J_n^2(t,x) dt.$$

Используя найденное в лемме рекурентное соотношение, находим оценку сверху $\Delta(T_\alpha, M_{B_n}) = \sup\limits_{0 \le x \le 1} (\tilde{J}(x))^{\frac{1}{2}}$. Оценка снизу получается из очевидных вычислений $\sup\limits_{0\le x\le 1}\tilde{J}(x) \ge \tilde{J}(x)|_{x=1}$. Получаем одинаковый по α_1 порядок.

Отсюда и следует утверждение теоремы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Тихонов А. Н.* О регуляризации некорректно поставленных задач // ДАН СССР. 1963. Т. 153, № 1. С. 49–52.

2. *Хромова Г. В.* О тихоновской регуляризации // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2001. Т. 1. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 2. С. 75–78.

3. *Хромова Г. В.* Об одном способе нахождения приближенных решений операторных уравнений первого рода // Дифференциальные уравнения и вычислительная математика : межвуз. сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1973. Вып. 3. С. 58–79.

4. *Хромова Г. В., Шаталина О. И.* Решение задачи типа Колмогорова — Никольского для операторов тихоновской регуляризации // Математика. Механика : сб. науч. тр. 2011. Вып. 12. С. 11–112.

5. *Хромова Г. В.* О модулях непрерывности неограниченных операторов // Изв. вузов. Сер. Математика. 2006. № 9(532). С. 71–78.

УДК 516.9

В. Р. Шебалдин

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА В ЗАДАЧЕ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ФОНДОВООРУЖЕННОСТЬ

Рассмотрим модель Рамсея экономического роста предприятия замкнутого типа. Под таким предприятием понимается производство, на котором создается один универсальный продукт, который может потребляться и инвестироваться. При этом рынки работают бесперебойно, производственные факторы существенно не меняются, при изменении цен технология не подвергается никаким изменением.

Пусть $K(t)$ – капитал предприятия, $L(t)$ – количество занятых (трудовые резервы). В качестве управления $u(t)$ указывается часть стоимости произведенного продукта, которая идет на увеличение капитала предприятия. Таким образом, имеем следующую модель [1]:

$$\dot{K}(t) = u(t)F(K(t), L(t)), \qquad K(0) = K_0, \tag{1}$$

$$\dot{L}(t) = \mu L(t), \qquad L(0) = 0, \tag{2}$$