УДК 517.984

В. А. Юрко

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА НЕКОМПАКТНЫХ ГРАФАХ

1. Исследуется обратная задача восстановления сингулярных дифференциальных операторов с неинтегрируемыми особенностями и с обобщенными граничными условиями Дирихле на некомпактных звездообразных графах по заданным спектральным данным. Приведена теорема единственности и получена конструктивная процедура решения обратной задачи.

Рассмотрим некомпактный звездообразный граф T в $\mathbf{R}^\ell$ с множеством вершин $\mathcal{V} = \{v_0, \ldots, v_p\}$ и множеством ребер $\mathcal{E} = \{e_0, \ldots, e_p\}$, где $e_j = [v_j, v_0]$, $j = \overline{1,p}$ – конечные отрезки, а $e_0 = [v_0, v_{p+1})$ – луч, $v_{p+1} := \infty$. Пусть l_j – длина ребра e_j, $j = \overline{1,p}$. Каждое ребро e_j, $j = \overline{1,p}$, параметризуется параметром $x_j \in [0, l_j]$ так, что начальная точка v_j соответствует $x_j = 0$, а конечная точка v_0 соответствует $x_j = l_j$. Луч $e_0 = [v_0, \infty)$ параметризуется параметром $x_0 \in [0, \infty)$ так, что $x_0 = 0$ соответствует вершине v_0. Функция Y на T имеет вид $Y = \{y_j\}_{j=\overline{0,p}}$, где функция $y_j(x_j)$ определена на ребре e_j. Пусть $q = \{q_j\}_{j=\overline{0,p}}$ – интегрируемая функция на T. Рассмотрим дифференциальное уравнение на T:

$$-y_j''(x_j) + Q_j(x_j)y_j(x_j) = \lambda y_j(x_j), \quad Q_j(x_j) = \frac{\omega_j}{x_j^2} + q_j(x_j), \quad j = \overline{0,p}, \tag{1}$$

где λ – спектральный параметр, ω_j – вещественные числа, $Q = \{Q_j\}_{j=\overline{0,p}}$ – вещественнозначная функция на графе T. Пусть для определенности $\omega_j = \nu_j^2 - 1/4$, $Re\,\nu_j > 0$, $\nu_j \notin \mathbf{N}$, $\nu_0 = 1/2$ (остальные случаи исследуются аналогично). Предположим, что $q_j(x_j)x_j^{1-2\nu_j}$, $j = \overline{1,p}$, и $(1 + x_0)q_0(x_0)$ интегрируемы. Функция Q на графе T называется *потенциалом.* В статье исследуется краевая задача $L = L(Q)$ для дифференциального уравнения (1) на графе T со стандартными условиями склейки [1] во внутренней вершине v_0 и с краевыми условиями

$$y_j(x_j) = O(x_j^{\nu_j+1/2}),\ x_j \to 0,\ j = \overline{1,p}, \tag{2}$$

в граничных вершинах v_j. Пусть $\{S_{jm}(x_j, \lambda)\}_{m=1,2}$ – фундаментальная система решений Бесселя уравнения (1) на ребре e_j такая, что

$S_{jm}(x_j,\lambda) \sim c_{jm} x_j^{\mu_{jm}},\ x_j \to 0,\ \mu_{jm} = (-1)^m \nu_j + 1/2,\ c_{j1}c_{j2} = (2\nu_j)^{-1}$, $\langle S_{j1}, S_{j2}\rangle \equiv 1$, где $\langle y, z\rangle := yz' - y'z$ [2].

Рассмотрим функции

$$G_0(\lambda) = \prod_{j=1}^{p} S_{j2}(l_j,\lambda), \quad g_0(\lambda) = G_0(\lambda)\sum_{j=1}^{p} \frac{S'_{j2}(l_j,\lambda)}{S_{j2}(l_j,\lambda)}\,. \tag{3}$$

Пусть функции $G_k(\lambda)$ и $g_k(\lambda)$ получаются из $G_0(\lambda)$ и $g_0(\lambda)$ соответственно заменой $S_{k2}^{(\xi)}(l_k,\lambda)$ на $S_{k1}^{(\xi)}(l_k,\lambda)$, $\xi = 0,1$. Пусть $\lambda = \rho^2$, $Im\,\rho \geq 0$. Положим $\Omega_0 = \{\rho :\ \ Im\,\rho > 0\}$, $\Omega = \{\rho :\ \ Im\,\rho \geq 0, \rho \neq 0\}$, $\Omega_+ = \{\rho :\ Im\,\rho = 0\}$. Через Π_0 обозначим λ – плоскость с двухсторонним разрезом Π_+ вдоль луча $\gamma := \{\lambda :\ \lambda \geq 0\}$, а $\Pi = \overline{\Pi_0} \setminus \{0\}$. Тогда при отображении $\rho \to \rho^2 = \lambda$ множества Π, Π_+ и Π_0 соответствуют множествам Ω, Ω_+ и Ω_0. Пусть $e(x_0,\rho)$, $x_0 \geq 0$, $Im\,\rho \geq 0$ – решение Йоста для уравнения (1) на ребре e_0 (см. [1]). Обозначим

$$\Delta(\rho) = G_0(\lambda)e'(0,\rho) - g_0(\lambda)e(0,\rho),$$

$$\Delta_k(\rho) = G_k(\lambda)e'(0,\rho) - g_k(\lambda)e(0,\rho). \tag{4}$$

Теорема 1. *Функции $\Delta(\rho)$ и $\Delta_k(\rho)$, $k = \overline{1,p}$, являются аналитическими в Ω_0 и непрерывными в $\overline{\Omega_0}$. При вещественном $\rho \neq 0$, $\overline{\Delta(\rho)} = \Delta(-\rho)$, $\overline{\Delta_k(\rho)} = \Delta_k(-\rho)$.*

Зафиксируем $k = 1,\ldots,p$. Пусть $\Psi_k = \{\psi_{kj}\}_{j=\overline{0,p}}$ – решение уравнения (1) на T, удовлетворяющее условиям склейки

$$\psi_{kj}(l_j,\lambda) = \psi_{k0}(0,\lambda),\ j = \overline{1,p}, \qquad \sum_{j=1}^{p} \psi'_{kj}(l_j,\lambda) = \psi'_{k0}(0,\lambda) \tag{5}$$

и граничным условиям

$$\left.\begin{array}{c} \psi_{kk}(x_k,\lambda) = c_{k1}x_k^{-\nu_k+1/2}(1+o(1)),\ x_k \to 0, \\ \psi_{kj}(x_j,\lambda) = O(x_j^{\nu_j+1/2}),\ x_j \to 0,\ j = \overline{1,p}\setminus k, \\ \psi_{k0}(x_0,\lambda) = O(\exp(i\rho x_0)),\ x_0 \to \infty. \end{array}\right\} \tag{6}$$

Учитывая (6), получаем

$$\left.\begin{array}{c} \psi_{kk}(x_k,\lambda) = S_{k1}(x_k,\lambda) + M_{kk}(\lambda)S_{k2}(x_k,\lambda), \\ \psi_{kj}(x_j,\lambda) = M_{kj}(\lambda)S_{j2}(x_j,\lambda), \quad j = \overline{1,p}\setminus k, \\ \psi_{k0}(x_0,\lambda) = M_{k0}(\lambda)e(x_0,\rho), \end{array}\right\} \tag{7}$$

где коэффициенты $M_{kj}(\lambda)$ не зависят от x_j. Функцию $M_k(\lambda) := M_{kk}(\lambda)$ будем называть *функцией Вейля* относительно вершины v_k, а вектор $M(\lambda) = [M_k(\lambda)]_{k=\overline{1,p}}$ – *вектором Вейля.* Подставляя (7) в условия склейки (5), получаем систему линейных алгебраических уравнений s_k относительно $M_{kj}(\lambda)$, $j = \overline{0,p}$. Определитель системы s_k равен $\Delta(\rho)$. Решая s_k по формулам Крамера, вычисляем

$$M_k(\lambda) = -\frac{\Delta_k(\rho)}{\Delta(\rho)}\,,$$

$$M_{kj}(\lambda) = \prod_{s=1}^{p} S_{s2}(l_s,\lambda)\frac{e(0,\rho)}{\Delta(\rho)S_{j2}(l_j,\lambda)S_{k2}(l_k,\lambda)}, \quad j = \overline{1,p}\setminus k. \qquad (8)$$

2. Рассмотрим компактный граф $T_0 := T \setminus \{e_0\}$ с множеством ребер $e_1,\dots,e_p$ и множеством вершин $v_0,\dots,v_p$. Пусть L_0 – краевая задача для уравнения (1) на графе T_0 со стандартными условиями склейки и с граничными условиями (2).

Теорема 2. *Нули целой функции $g_0(\lambda)$ совпадают с собственными значениями краевой задачи L_0. Собственные значения краевой задачи L_0 вещественны. Алгебраическая кратность каждого собственного значения равна его геометрической кратности.*

Пусть $\Lambda^* := \{\lambda = \rho^2 :\ \rho \in \Omega,\ \Delta(\rho) = 0\}$ – множество нулей функции $\Delta(\rho)$ в Ω. Тогда $\Lambda^* = \Lambda' \cup \Lambda''$, где

$$\Lambda' := \{\lambda = \rho^2 :\ \rho \in \Omega_0,\ \Delta(\rho) = 0\},$$

$$\Lambda'' := \{\lambda = \rho^2 :\ Im\,\rho = 0,\ \rho \neq 0,\ \Delta(\rho) = 0\}.$$

Функции Вейля $M_k(\lambda)$, $k = \overline{1,p}$, являются аналитическими в $\Pi_0 \setminus \Lambda'$ и непрерывными в $\Pi \setminus \Lambda^*$. Множество особенностей $M(\lambda)$ (как аналитической функции) совпадает с множеством $S^* := \gamma \cup \Lambda^*$ и называется *спектром* L. Обозначим

$$V_k(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\Big(M_k^-(\lambda) - M_k^+(\lambda)\Big),\ \lambda > 0,\ k = \overline{1,p},$$

$$M_k^{\pm}(\lambda) := \lim_{\varepsilon\to 0} M_k(\lambda \pm i\varepsilon),\ Re\,\varepsilon > 0.$$

Теорема 3. *Пусть $\lambda_0 = \rho_0^2$, $\rho_0 \in \Omega_0$, т.е. $\lambda_0 \notin [0,\infty)$. Для того чтобы λ_0 было собственным значением L на T, необходимо и достаточно, чтобы $\lambda_0 \in \Lambda'$. Каждое собственное значение из Λ' вещественно, его алгебраическая кратность равна геометрической кратности, и каждый полюс $M_k(\lambda)$ является простым.*

Теорема 4. *Пусть $\lambda_0 = \rho_0^2 > 0$. Для того чтобы λ_0 было собственным значением L, необходимо и достаточно, чтобы $\lambda_0 \in \Lambda''$.*

Отметим, что множество Λ'' положительных собственных значений может быть пустым, конечным или бесконечным неограниченным.

Пусть Λ^+ – множество неотрицательных собственных значений L. Тогда $\Lambda^+ = \Lambda''$, если $\lambda_0 = 0$ не является собственным значением L, и $\Lambda^+ = \Lambda'' \cup \{0\}$, если $\lambda_0 = 0$ является собственным значением L. Обозначим $\Lambda^- := \Lambda'$. Тогда $\Lambda := \Lambda^- \cup \Lambda^+$ – множество всех собственных значений L, причем Λ ограничено снизу и не имеет конечных предельных точек. В частности, Λ^- – конечное множество. Таким образом, спектр L состоит из положительной полуоси $\gamma = \{\lambda : \ \lambda \geq 0\}$ и дискретного вещественного ограниченного снизу множества $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\in\theta}$ собственных значений. Множество индексов $\theta \in \mathbf{N}$ может быть пустым, конечным или бесконечным. Тогда $\Lambda^{\pm} = \{\lambda_n\}_{n\in\theta_{\pm}}$, где $\theta = \theta_- \cup \theta_+$.

Теорема 5. *Зафиксируем $\lambda_n \in \Lambda$. Существуют конечные пределы*

$$m_{kn} := \lim_{\lambda\to\lambda_n,\, \lambda\in\Pi} (\lambda - \lambda_n) M_k(\lambda), \quad k = \overline{1,p}.$$

Обозначим $m = \{m_{kn}\}_{k=\overline{1,p}, n\in\theta}$, $V(\lambda) = \{V_k(\lambda)\}_{k=\overline{1,p}}$, $\lambda > 0$. Данные $S = \{V(\lambda), \Lambda, m\}$ называются *спектральными данными для L*.

Обратная задача 1. Даны S, построить потенциал Q на графе T.

Теорема 6. *Задание спектральных данных S однозначно определяет потенциал q на T. Решение обратной задачи 1 строится по следующему алгоритму.*

Алгоритм 1. *Даны спектральные данные S.*

1) Для каждого $k = \overline{1,p}$ решаем вспомогательную обратную задачу: по S построить $M_k(\lambda)$ и потенциал Q_k на e_k. При этом используем метод спектральных отображений [1, 2].

5) Вычисляем $S_{km}(x_k, \lambda)$, $m = 1, 2$, и $\psi_{kk}(x_k, \lambda)$ из (7).

6) Находим $\psi_{kj}(l_j, \lambda)$ при $j, k = \overline{1,p}$, используя (5).

7) Строим $M_{kj}(\lambda)$, $j = \overline{1,p} \setminus k$ по (7).

8) Вычисляем $\Delta(\rho)/e(0,\rho)$ из (8).

9) Строим $G_0(\lambda)$ и $g_0(\lambda)$ по (3).

10) Находим $M_0(\lambda) := e'(0,\rho)/e(0,\rho)$, используя (4).

11) Строим потенциал Q на e_0, решая классическую обратную задачу Штурма – Лиувилля на полуоси по функции Вейля $M_0(\lambda)$ (см. [1]).

Таким образом, выполняя алгоритм 1, мы получаем решение обратной задачи 1 и доказываем его единственность.

Аналогичным образом исследуется обратная задача восстановления потенциала по вектору Вейля $M(\lambda)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Национального научного совета Тайваня (проекты 10-01-00099 и 10-01-92001-ННС).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Юрко В. А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М. : Физматлит, 2007.

2. *Yurko V. A.* Singular differential operators on noncompact spatial networks // Preprint. Schriftenreiche des Fachbereichs Fur Mathematik Universitaet Duisburg-Essen, SM-DU-728. Duisb-Essen, 2011. P. 1–17.