УДК 629

М. К. Иванов, Ю. Н. Челноков

АЛГОРИТМЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОРИЕНТАЦИИ ДВИЖУЩЕГОСЯ ОБЪЕКТА В ИНЕРЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

В данной статье рассматривается задача определения ориентации объекта в инерциальной системе координат по его известной (измеренной) абсолютной угловой скорости. Эта задача занимает важное место в теории управления движением космических, авиационных, наземных и других движущихся аппаратов (роботов, подводных лодок и т.п.).

1. Дифференциальные уравнения ориентации. Все рассматриваемые в статье алгоритмы определения ориентации основаны на одном из двух кватернионных дифференциальных уравнений ориентации.

Первое уравнение, классическое, имеет вид [1, 2]

$$2\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt} = \boldsymbol{\lambda} \circ \boldsymbol{\omega}(t), \tag{1}$$

где $\boldsymbol{\lambda}$ – искомый кватернион поворота, компонентами которого являются четыре параметра Эйлера (Родрига — Гамильтона), $\boldsymbol{\omega}(t)$ – кватернион, образованный из вектора абсолютной угловой скорости объекта в проекциях на связанные оси.

Второе уравнение – уравнение типа Риккати имеет вид [2]

$$4\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \circ \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{\omega} \circ \boldsymbol{x}, \tag{2}$$

где искомый кватернион ориентации $\boldsymbol{\lambda}$ связан с кватернионной переменной $\boldsymbol{x}$, имеющей нулевую скалярную часть, соотношением

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{1 - ||\boldsymbol{x}|| + 2\boldsymbol{x}}{1 + ||\boldsymbol{x}||}. \tag{3}$$

Оба этих уравнения являются дифференциальными нестационарными уравнениями без особых точек; при этом уравнение (1) является линейным, а уравнение (2) – нелинейным.

2. Постановка задачи. Входными данными являются начальная ориентация объекта, т.е. кватернион $\boldsymbol{\lambda}_0 = \boldsymbol{\lambda}(t_0)$, а также данные об угловой скорости объекта, которые могут быть мгновенными либо интегральными. Мгновенные данные – это значения функций $\omega_k(t)$ $(k = 1, 2, 3)$

(проекций угловой скорости на связанные координатные оси) в заданные моменты времени t_n. Интегральные данные – это приращения интегралов от этих функций:

$$\gamma_k = \int\limits_{t_{n-1}}^{t_n} \omega_k(t)\; dt, \qquad k = 1, 2, 3. \tag{4}$$

Задача заключается в том, чтобы определить ориентацию объекта в заданные моменты времени t_n, т.е. найти кватернионы $\boldsymbol{\lambda}_n = \boldsymbol{\lambda}(t_n)$.

Решение заключается в непрерывном интегрировании уравнения (1) или (2) в соответствии с каким-либо алгоритмом на бортовом компьютере движущегося аппарата. При этом входные данные (мгновенные, либо интегральные) измеряются специальными гироскопическими датчиками.

3. Алгоритмы. Всего в работе были рассмотрены 12 алгоритмов. В первую очередь, это непосредственное решение уравнения (1) методом Рунге — Кутты 4-го порядка точности. Остальные 11 алгоритмов являются специальными алгоритмами решения уравнения (1) или (2), которые строятся по общей рекуррентной схеме, имеющей вид

$$\boldsymbol{\lambda}_n = \boldsymbol{\lambda}_{n-1} \circ \boldsymbol{\lambda}^*, \tag{5}$$

где кватернион $\boldsymbol{\lambda}^*$ вычисляется на каждом шаге интегрирования по соотношениям, определяемым выбранным алгоритмом.

В статье приводятся пять специальных алгоритмов решения уравнения (1), условно называемые нами «старыми»: метод средней скорости 2-го порядка точности, одношаговый и двухшаговый алгогритмы 3-го порядка, двухшаговый алгоритм 4-го порядка и четырёхшаговый алгоритм 4-го порядка (алгоритм Панова).

На основе уравнения (2) было рассмотрено четыре специальных алгоритма, называемые «новыми»: два одношаговых алгоритма 3-го порядка точности, а также двухшаговые алгоритмы 3-го и 4-го порядка.

Наконец, ещё два алгоритма были получены нами путём приведения алгоритмов для уравнения (1) к новой переменной ($\boldsymbol{x}$), т.е. приведением к форме, соответствующей уравнению (2). При этом получающиеся алгоритмы упрощались путём разложения в ряды Тейлора. Приведём здесь эти алгоритмы, именуемые «смешанными»:

– одношаговый алгоритм третьего порядка точности:

$$\boldsymbol{x} = \frac{1}{4}\,\boldsymbol{\varphi} + \frac{1}{48}\,\boldsymbol{\varphi}' \times \boldsymbol{\varphi} + \frac{1}{192}\,\boldsymbol{\varphi}||\boldsymbol{\varphi}||,$$

– двухшаговый алгоритм четвёртого порядка точности:

$$\boldsymbol{x} = \frac{1}{4}\,\boldsymbol{\varphi} + \frac{1}{6}\,\boldsymbol{\varphi}' \times \boldsymbol{\varphi}'' + \frac{1}{192}\,\boldsymbol{\varphi}||\boldsymbol{\varphi}||,$$

где $\varphi = \varphi' + \varphi''$, φ' и φ'' – интегральная информация с двух последних шагов.

4. Результаты тестирования. Все рассмотренные алгоритмы были реализованы на компьютере и протестированы с помощью методики математического моделирования: моделировались простые и затухающие гармонические колебания, а также простые гармонические колебания с наложенными «помехами» – высокочастотными колебаниями малой амплитуды. Приведём результаты тестирования для гармонических колебаний с «помехами» (таблица). Амплитуда основного колебания равна 20°, частота – 1 Гц, амплитуда «помехи» – $3'$, частота – 100 Гц.

Алгоритм	Порядок	$h = 0.1$	$h = 0.01$	$h = 0.001$
Метод Рунге – Кутты	4	8,43E+01	1,07E+01	2,25E-04
Метод средней скорости	2	3,45E+01	3,24E-01	3,16E-03
Старый 1-шаговый алгоритм	3	5,89E+00	6,32E-03	9,43E-06
Старый 2-шаговый алгоритм	3	7,14E-01	4,05E-03	1,72E-06
Старый 2-шаговый алгоритм	4	7,18E-01	4,05E-03	1,72E-06
Старый 4-шаговый алгоритм (алг. Панова)	4	7,86E-02	3,32E-03	8,34E-07
Новый 1-шаговый алгоритм (алгоритм 1)	3	1,73E+00	1,67E-02	3,25E-06
Новый 1-шаговый алгоритм (алгоритм 2)	3	5,21E+00	5,74E-03	8,65E-06
Новый 2-шаговый алгоритм	3	1,79E+00	2,34E-03	2,50E-06
Новый 2-шаговый алгоритм	4	8,38E-02	5,28E-03	1,11E-06
Смешанный 1-шаговый алгоритм	3	5,14E+00	1,64E-02	8,65E-06
Смешанный 2-шаговый алгоритм	4	1,11E-01	3,57E-03	7,48E-07

Проанализировав эти и другие полученные результаты, можно прийти к выводу, что для достижения максимальной точности при наименьших затратах рекомендуется использовать один из алгоритмов четвёртого порядка. А именно наиболее стабильные результаты продемонстрировали алгоритмы, полученные на основе уравнений типа Риккати: *новый двухшаговый и смешанный двухшаговый алгоритмы четвёртого порядка точности.*

Хорошо известный *алгоритм Панова*, хотя и продемонстрировал хорошую точность (впрочем, не превосходящую точность остальных алгоритмов 4-го порядка), значительно сложнее остальных алгоритмов.

Метод Рунге – Кутты четвёртого порядка, хотя и продемонстировал в целом высокую точность, имеет свои недостатки. Этот алгоритм единственный в работе использует мгновенную информацию, что сильно сказывается на его практическом применении: возникающие при реальных измерениях помехи начинают влиять гораздо существеннее, чем на алгоритмы, базирующиеся на интегральной информации (усредняющей входные данные).

Также интересно отметить, что *смешанный 2-шаговый алгоритм 4-го порядка* практически всегда оказывался точнее *старого 2-шагового алгоритма 4-го порядка*, хотя он был получен из этого алгоритма переходом к новым переменным и отбрасыванием членов большого порядка малости.

Это наглядно показывает, что *различные приближения одних и тех же формул могут давать разные методические погрешности* в зависимости от того, какие члены были удержаны, и в какой форме записаны итоговые формулы. Как было продемонстрировано в данной статье, уравнение типа Риккати приводит к алгоритмам, которые лучше ведут себя на практике.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.* Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. М.: Наука, 1992.

2. *Челноков Ю. Н.* Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. М.: Физматлит, 2006.

УДК 533.6.011

Т. В. Лягаева, И. А. Чернов

К УЧЕТУ ПРОТИВОДАВЛЕНИЯ В ЗАДАЧЕ О СИЛЬНОМ ВЗРЫВЕ

Задача о сильном взрыве в автомодельной постановке была независимо решена Л. И. Седовым и Тейлором (С – Т). При этом давление в покоящемся газе предполагалось нулевым. Учет противодавления был выполнен независимо Н. С. Бурновой (Мельниковой) и Сакураи. В рамках координатного разложения с решением С – Т в качестве основного члена они нашли первую поправку к нему. Построение следующих членов разложения связано с преодолением технических трудностей, связанных с быстрым увеличением числа слагаемых, входящих в системы ОДУ для поправок. Тем не менее их нахождение (ниже рассчитана следующая из них) позволяет точнее проследить эволюцию течения за ударной волной (УВ) для не очень малого интервала времени. Библиография по этой задаче есть в [1]. Постановка задачи и основные обозначения, использованные ниже, совпадают с принятыми в главе 3 из [2].

Заметим, что недавно был предложен [3] альтернативный подход к данной проблеме.