искать методом неопределенных коэффициентов, используя найденные функциональные формы решений и привлекая средства компьютерной алгебры.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Хантер К.* О захлопывании пустой полости в воде // Механика: период. сб. пер. иностр. ст. 1961. № 3 (67). С. 77–100.

2. *Кожанов В. С.* Расчет отраженных ударных волн в задаче о схлопывании пустой полости // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2010. Т. 10. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 1. С. 44–54.

3. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука, 1965. 296 с.

УДК 533.6.011

Д. И. Ливеровский, С. П. Шевырев

МЕТОД ДАВЫДОВА ДЛЯ СЛУЧАЯ НЕСЖИМАЕМОЙ НЕВЯЗКОЙ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ НА РЕГУЛЯРНОЙ СЕТКЕ

В случае моделирования движения несжимаемой тяжелой жидкости со свободной поверхностью необходимо определять положение этой поверхности в процессе решения, а также учитывать влияние земного тяготения. В данной статье такая задача решалась численным методом Давыдова [1] на регулярной сетке в случае двух пространственных переменных. Для определения положения свободной поверхности использовался метод маркеров [2, 3].

В ходе выполнения работы была написана программа на языке Python, реализующая метод Давыдова для случая тяжелой несжимаемой жидкости.

Течение тяжелой несжимаемой невязкой жидкости для случая двух пространственных переменных моделируется путем решения краевых задач для системы уравнений Эйлера и уравнения неразрывности:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \rho}{\partial y} = -g, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где u, v – компоненты вектора скорости; ρ – давление; ρ_0 – постоянная плотность; g – ускорение свободного падения.

Область интегрирования разбивается регулярной сеткой на ячейки размером $h_x \times h_y$ каждая. Все искомые параметры (компоненты вектора скорости, давление, плотность) отнесены к центру ячейки (i,j), где i – номер строки, j – номер столбца, $i = 1\dots n$; $j = 1\dots m$. Вещество, попавшее в ячейку, называется крупной частицей. Суть метода Давыдова (метода крупных частиц) состоит в том, что он использует расщепление по физическим факторам и по координатам. Численное решение получается продвижением дискретными шагами по времени. В классическом методе Давыдова реализация каждого шага осуществляется в три этапа.

1. Эйлеров этап. На этом этапе жидкость предполагается моментально заторможенной, т. е. пренебрегают всеми эффектами, связанными с перемещениями, потока массы через границы ячеек нет, и движение ячейки как твёрдого тела происходит только за счёт сил давления. На эйлеровом этапе опускают конвективные производные, отвечающие за перетекание жидкости.

2. Лагранжев этап. На этом этапе происходит перетекание газа из одной ячейки в другую за счёт вычисления направленного потока массы.

3. Заключительный этап. На этом этапе получаются значения параметров на следующем шаге по времени.

Для течения несжимаемой жидкости добавим еще один этап, назовем его «Пуассонов этап». На нем решается разностное уравнение Пуассона для давления. Это матричное уравнение получается из разностных формул эйлерова этапа ($(k+1)$-й шаг по времени):

$$\begin{cases} \tilde{u}_{i,j}^k = u_{i,j}^k - \frac{\tau}{2\rho_0 h_x}(\rho_{i+1,j}^k - \rho_{i-1,j}^k), \\ \tilde{v}_{i,j}^k = v_{i,j}^k - \frac{\tau}{2\rho_0 h_y}(\rho_{i,j+1}^k - \rho_{i,j-1}^k) - \tau g, \end{cases}$$

из равенства нулю разностного представления уравнения неразрывности на эйлеровом этапе $(k+1)$-го шага по времени:

$$\tilde{D}_{i,j}^k = \frac{\tilde{u}_{i,j+1}^k - \tilde{u}_{i,j-1}^k}{2h_x} + \frac{\tilde{v}_{i+1,j}^k - \tilde{v}_{i-1,j}^k}{2h_y}, \tag{2}$$

и имеет вид

$$\rho_{i,j} = \frac{1}{4}(\rho_{i-1,j} + \rho_{i,j-1} + \rho_{i+1,j} + \rho_{i,j+1}) - \frac{h^2}{2\tau} D_{i,j}^k, \tag{3}$$

где $D_{i,j}^k$ – разностное представление уравнения неразрывности на k-м шаге по времени, аналогичное (2); τ – шаг по времени; $h = h_x = h_y$.

Граничные условия: непротекание на жестком теле.

Приведем результаты расчетов. На рис. 1 иллюстрируется метод Лакса [3], на рис. 2 – 8 – метод Давыдова. На рис. 2, 3 представлена тестовая задача, решенная для сравнения с методом Лакса.

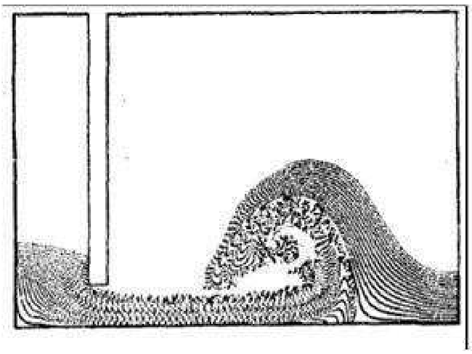

Рис. 1

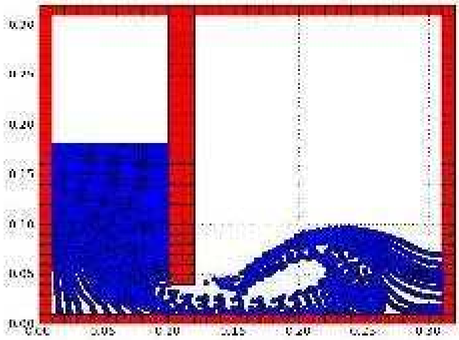

Рис. 2

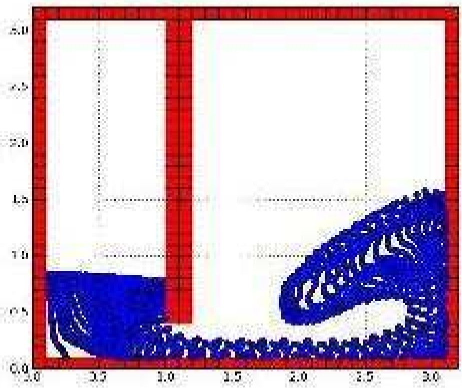

Рис. 3

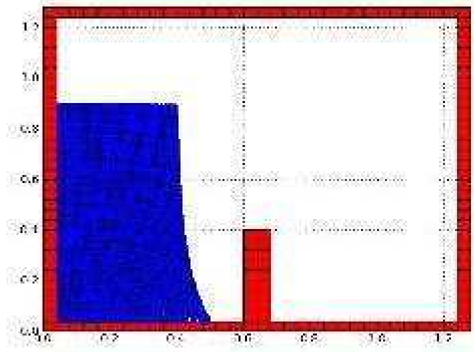

Рис. 4

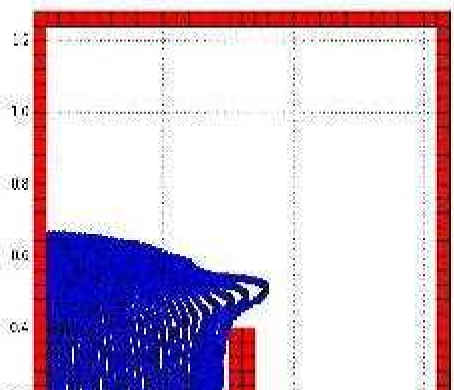

Рис. 5

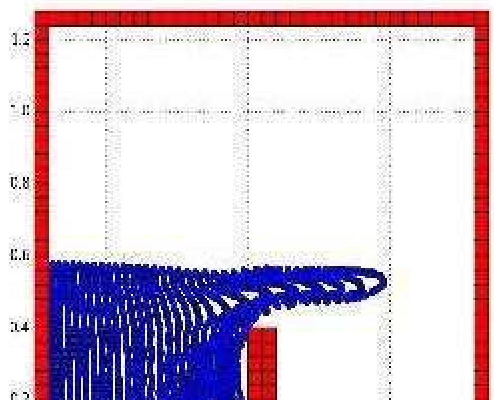

Рис. 6

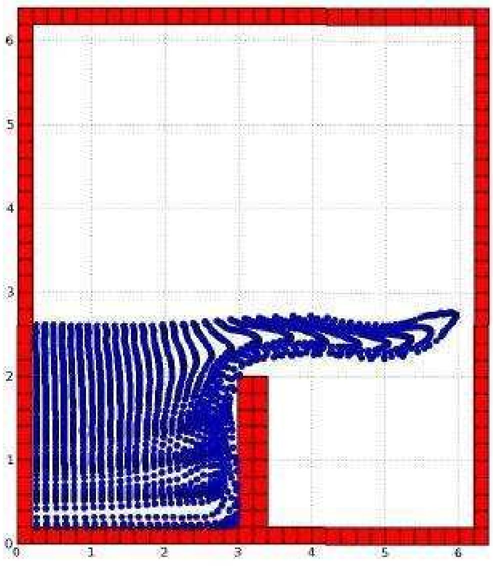

Рис. 7

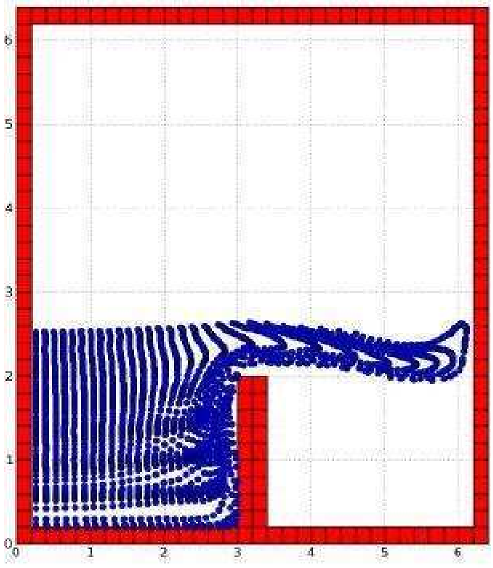

Рис. 8

На рис. 4 – 8 представлено решение задачи о распаде водяного столба и его взаимодействия с препятствием.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Белоцерковский О. М., Давыдов Ю. М.* Метод крупных частиц в газовой динамике. Вычислительный эксперимент. М.: Наука, 1982.

2. *Шевырев С. П.* Расчет течения тяжелой несжимаемой невязкой жидкости методом Давыдова (нестационарный плоский случай) // Математика. Механика: сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2009. Вып. 11. С. 148–153.

3. *Поттер Д.* Вычислительные методы в физике. М.: Мир, 1975.

УДК 533.6.011

Р. И. Ливеровский, С. П. Шевырев

МЕТОД ДАВЫДОВА НА ТРЕУГОЛЬНОЙ СЕТКЕ ДЛЯ СЛУЧАЯ СЖИМАЕМОГО ГАЗА

В данной статье рассматривается моделирование движения идеального сжимаемого газа около абсолютно твердого тела при помощи метода Давыдова [1], обобщенного на случай нерегулярной треугольной сетки [2]. Использование такой сетки дает возможность производить расчеты течения около тела произвольной формы.

В ходе выполнения работы была написана программа на языке Python, реализующая указанный метод в двумерном нестационарном случае. Имеется возможность определения давления и числа Маха в потоке и на теле. С помощью данной программы по единому алгоритму можно исследовать сложные картины обтекания тел различной формы