

$$\Omega_a = c_3(g_2 + c_1g_3), i = 1, 2, 3 \quad (9)$$

Здесь $y = Jx + K = (p_0)^{1/2}J_0z + K$, и при $K = \text{const}$ система (9) становится автономной [2-4].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Ольшанский В.Ю.* Квадратичные интегралы и приводимость уравнений движения сложной механической системы в центральном поле // Прикладная математика и механика. Т.65, вып. 1. 2001. С. 36-50.
2. *F.de Brun.* Rotation kring en fix punkt. Ofversigt of Kongl Svenska Vetenskaps — Akademiens Vorhandlingar. Stookholm. 1893.
3. *Koob G.* Sur le probleme de la rotation d un corps autour d un point fixe. Bulletin de la Societe Mathematique. 1895. V. 23.
4. *Харламова Е.И.* О движении твердого тела вокруг неподвижной точки в центральном ньютоновском поле сил. Изв. Сибир. отд. АН СССР. 1959. №6.

УДК 629

И.А. Панкратов, Ю. Н. Челноков

К ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОЙ В СМЫСЛЕ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ ПЕРЕОРИЕНТАЦИИ КРУГОВОЙ ОРБИТЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

В [1] было показано, что в случае переориентации круговой орбиты космического аппарата (КА) исходная дифференциальная краевая задача оптимального управления, имеющая размерность, равную 10, может быть сведена (в случае быстрогодействия) к краевой задаче размерности 3, описываемой дифференциальными уравнениями линии переключения

$$\frac{d\nu_1}{d\varphi} = \nu_2, \quad \frac{d\nu_2}{d\varphi} = -\nu_1 + \kappa\nu_3, \quad \frac{d\nu_3}{d\varphi} = -\kappa\nu_2, \quad (1)$$

где $\kappa = \frac{r^2}{c}u$, $r = p_{or} = \text{const}$.

В уравнениях (1) r — модуль радиуса-вектора \mathbf{r} центра масс КА, c — постоянная площадей, φ — истинная аномалия, p_{or} — параметр орбиты, управление u — алгебраическая величина реактивного ускорения, перпендикулярного плоскости орбиты КА ($-u_{max} \leq u \leq u_{max}$); ν_j — переменные, связанные с фазовой кватернионной переменной λ и сопряжённой кватернионной переменной μ соотношением $\nu = \text{vect}(\tilde{\lambda} \circ \mu)$.

Так как переменные $\nu_k, k = 1, 2, 3$ есть функции сопряжённых переменных, то их начальные значения ν_{k0} неизвестны. Для их нахождения было проанализировано аналитическое решение системы (1) на различных участках управляемого движения. Был найден период T функции переключения управления:

$$T = 2[\pi \pm 2 \arcsin(-D/a)]/k,$$

где $a = [(\nu_{10} - D)^2 + (\nu_{20}/k)^2]^{\frac{1}{2}}$, $D = \kappa/(1 + \kappa^2)(\nu_{30} + \kappa\nu_{10})$, $\nu_{i0} = \nu_i(t_0)$, $k = (1 + \kappa^2)^{\frac{1}{2}}$.

Верхний знак берётся, если на первом активном участке движения КА управление $u = -u_{max}$, нижний — в противном случае. Можно убедиться, что с учётом знака управления, фигурирующего в выражении для D , получается одно и то же значение периода T .

Следуя [1], была построена система трёх нелинейных алгебраических уравнений для нахождения значений переменных ν_1 , ν_2 в начальный момент времени и "длительности" управляемого движения φ_1 . В безразмерных переменных эта система имеет вид:

$$\begin{aligned} A(\varphi_1)\bar{\nu}_{10} + B(\varphi_1)\bar{\nu}_{20} + C_{11} \sin \varphi_1 + C_{12} \cos \varphi_1 &= 1, \\ \alpha\bar{\nu}_{10}^2 + \beta\bar{\nu}_{10}\bar{\nu}_{20} + \gamma\bar{\nu}_{10} + \delta\bar{\nu}_{20} + \epsilon\bar{\nu}_{20}^2 + \\ &+ C_{21} \sin^2 \varphi_1 + C_{22} \sin(2\varphi_1) = \zeta, \\ D_{31}\bar{\nu}_{10}^2 + D_{32}\bar{\nu}_{10}\bar{\nu}_{20} + D_{33}\bar{\nu}_{10} + D_{34}\bar{\nu}_{20} + D_{35}\bar{\nu}_{20}^2 + \\ &+ C_{31} \sin^2 \varphi_1 + C_{32} \sin(2\varphi_1) = R. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, C_{ij}, D_{km}, \zeta, R$ — величины, выражаемые через известные параметры задачи, $\nu_{1,2} = 2c/(\pm u_{max}r)\bar{\nu}_{1,2}$, $A(\varphi_1), B(\varphi_1)$ — линейные комбинации тригонометрических функций от φ_1 .

В системе (2) можно перейти к новым независимым переменным N_1, N_2, N_3 , связанным с неизвестными ν_1, ν_2, ν_3 соотношениями

$$\nu_1 = N_1 \cos \varphi_1 + N_2 \sin \varphi_1, \quad \nu_2 = -N_1 \sin \varphi_1 + N_2 \cos \varphi_1, \quad \nu_3 = N_3.$$

Это приводит к некоторому упрощению коэффициентов при неизвестных. Вид системы остаётся прежним.

Система (2) решалась с использованием программы, разработанной на языке C++ для операционной системы Linux. Использовался метод градиентного спуска решения системы нелинейных уравнений. Рассматривались два варианта: с малым и большим отклонениями между начальной и конечной ориентациями орбит. Лучшая сходимость метода была отмечена для малых отклонений. При большом отклонении вначале минимизировался функционал $L_1 = \sum_{i=1}^3 f_i^2$. Здесь $f_i, i = 1, 2, 3$ — левые части уравнений системы (2), записанных в виде $f_i = 0$. Затем найденные значения $\bar{\nu}_{10}, \bar{\nu}_{20}, \varphi_1$ использовались в качестве начальных при минимизации функционала $L_2 = \sum_{i=1}^3 |f_i|$. При малом отклонении сразу минимизировался функционал L_2 . Примеры результатов численного решения приведены в таблицах. (В них Ω_0, I_0 —

долгота восходящего узла и наклонение орбиты КА для начального момента времени; Ω_1, I_1 — для конечного.) Основными трудностями являются неединственность решения системы (2), периодичность по "времени" φ_1 .

Характерные величины: $p_{max} = 0.101907 \text{ м/с}^2$, $r = 26000000 \text{ м}$, $\Omega_0 = 87^\circ$, $I_0 = 80^\circ$.

Малое отклонение орбит: $\Omega_1 = 85^\circ, I_1 = 79^\circ$.

ν_{10}	ν_{20}	ν_{30}	φ_1 , рад	L_1	L_2
1.0060	3.4664	-19.488	3.7377	$6 \cdot 10^{-8}$	$3 \cdot 10^{-4}$
0.3866	-1.4883	28.392	3.1623	10^{-9}	$3 \cdot 10^{-5}$
-0.6671	-1.6384	44.512	3.0834	10^{-9}	$2 \cdot 10^{-6}$
-0.7127	-1.6445	45.215	3.0820	10^{-9}	$1 \cdot 10^{-6}$

Большое отклонение орбит: $\Omega_1 = 94^\circ, I_1 = 65^\circ$.

ν_{10}	ν_{20}	ν_{30}	φ_1 , рад	L_1	L_2
-0.2882	1.1601	-0.2499	3.0880	10^{-9}	$3 \cdot 10^{-5}$
0.5492	0.8975	-0.2410	3.8456	10^{-9}	$2 \cdot 10^{-5}$
0.1172	1.1234	-0.2840	3.4032	10^{-9}	$2 \cdot 10^{-5}$
-0.2712	3.0525	-1.1231	4.4617	10^{-9}	$6 \cdot 10^{-6}$

На рисунке приведены законы изменения сопряжённых переменных ν_i для их начальных значений, приведённых в четвёртой строке второй таблицы. (Кривая $\nu_1 = \nu_1(\varphi)$ — линия переключения управления.)

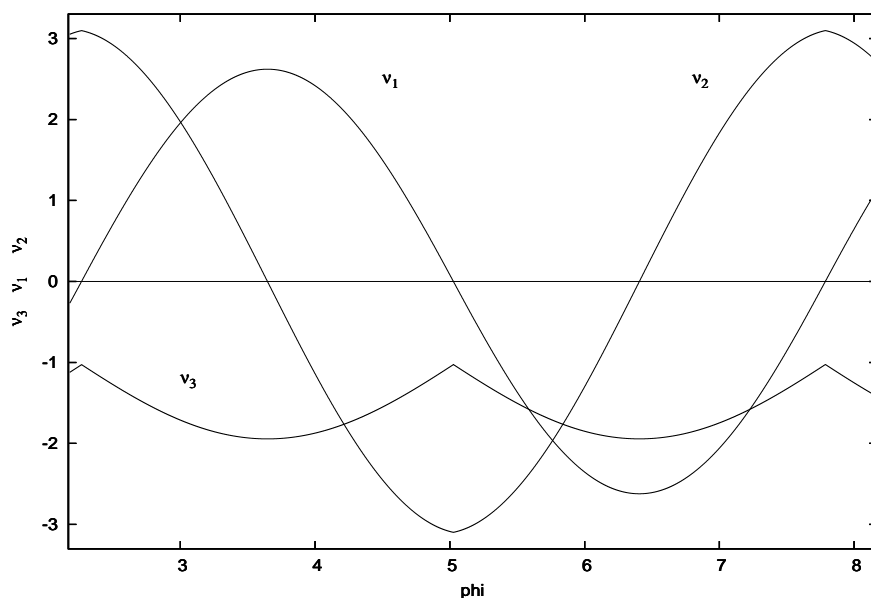


Рис. 1. Законы изменения сопряжённых переменных

Закключение. В работе продолжены исследования, начатые в [1], предложен алгоритм нахождения начальных условий интегрирования сопряжённых дифференциальных уравнений краевой задачи переориентации круговой орбиты КА. Выявлены основные трудности численного решения задачи: периодичность по "времени" φ_1 , неоднозначность нахождения начальных условий. Эти проблемы требуют дальнейшего изучения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №08-01-00 310).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Челноков Ю. Н. Оптимальная переориентация орбиты космического аппарата посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2006. Вып. 8. С. 231-234.

УДК 533.6.011

Я.Г. Сапунков

ВТОРОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О СХОДЯЩЕЙСЯ УДАРНОЙ ВОЛНЕ

В статье получено аналитическое решение задачи о сходящейся ударной волне во втором приближении в области между поверхностью ударной волны и предельной характеристикой. Приводятся значения показателей автомодельности в зависимости от отношения теплоемкостей, полученных на основе полных уравнений и первых двух приближенных решений.

1. В работе [1] показано, что уравнения движения идеального совершенного газа в задаче о сходящейся ударной волне в безразмерных автомодельных переменных могут быть приведены к виду

$$\begin{aligned} \frac{dV}{d \ln \lambda} &= - \left[(\nu + 1) V - \frac{2}{\gamma} (1 - \alpha) \right] + (V - \alpha) \frac{\Delta_4}{\Delta_0}, \\ \frac{d \ln R}{d \ln \lambda} &= - \frac{2(1 - \alpha)}{\gamma(V - \alpha)} - \frac{\Delta_4}{\Delta_0}, \\ \frac{dZ}{d \ln \lambda} &= -Z \left\{ \frac{2}{V - \alpha} \left[V - \frac{1 + \alpha(\gamma - 1)}{\gamma} \right] + (\gamma - 1) \frac{\Delta_4}{\Delta_0} \right\}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\Delta_4(V) = \nu V^2 - \left[(\nu + 1) \alpha + \frac{2}{\gamma} (1 - \alpha) - 1 \right] V + 2 \frac{\alpha}{\gamma} (1 - \alpha)$, $\Delta_0 = (V - \alpha)^2 - Z$. Здесь γ — отношение теплоемкостей, α — показатель автомодельности в законе движения ударной волны, $\nu = 1$ соответствует цилиндрической симметрии, $\nu = 2$ — сферической симметрии. Размерные переменные связаны с автомодельными переменными соотношениями

$$\lambda = \frac{r}{A(-t)^\alpha}, \quad v = \frac{r}{t} V, \quad \rho = \rho_0 R, \quad p = \frac{\rho_0 r^2}{\gamma t^2} Z R.$$