УДК 533.6.011: 532.529

Г. Д. Севостьянов

МЕТОД РАСЧЕТА ПАРАМЕТРОВ ПРИ РЕГУЛЯРНОМ ПЕРЕСЕЧЕНИИ КОСЫХ СКАЧКОВ

Дан алгоритм расчета параметров течения газа (на основе уравнений Чаплыгина) при регулярном взаимодействии косых скачков уплотнения. Рассмотренная схема течения устойчива по отношению к изгибу преломленных скачков, при этом «жидкий клин» отсутствует.

Уравнения Чаплыгина в переменных θ, σ [1] для плоского безвихревого установившегося течения идеального газа: $\varphi_\theta = -\psi_\sigma$, $\varphi_\sigma = K(\sigma)\,\psi_\theta$ (φ – потенциал скорости, θ – угол наклона вектора скорости к оси x, ψ – функция тока, K, σ – функции Чаплыгина) в [2] приведены к нелинейной системе в дивергентной форме:

$$(L(u))_\varphi = v_\psi, \quad v_\varphi = u_\psi, \quad u = -c\sigma, \quad v = c\theta,$$

$$L'(u) = k(u) = -K(\sigma), \quad c = (\gamma+1)\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{3/(\gamma-1)}, \tag{1}$$

$$k(0) = 0, \quad k'(0) = 1,$$

где $\gamma > 1$ – отношение теплоемкостей газа.

Тогда на скачке уплотнения имеем ($[f] = f_+ - f_-$ – разрыв f на скачке)

$$\left(\frac{d\varphi}{d\psi}\right)_c = -\frac{[v]}{[u]} = -\frac{[L]}{[v]}, \quad \left(\frac{d\varphi}{d\psi}\right)_c^2 = \frac{[L]}{[u]}; \quad [v]^2 = [L][u]. \tag{2}$$

Система Чаплыгина в переменных v, u имеет вид

$$\varphi_v = \psi_u, \quad \varphi_u = k(u)\,\psi_v.$$

На скачке (индекс «+» для величин на задней стороне скачка) (см. [2])

$$\left(\frac{d\varphi}{du}\right)_c = k_+\,\psi_v + \left(\frac{dv_+}{du_+}\right)_c \psi_u = \pm\sqrt{\frac{[L]}{[u]}}\left\{\psi_u + \left(\frac{dv_+}{du_+}\right)_c \psi_v\right\}, \tag{3}$$

т. е. на ударной поляре имеем из (3) условие косой производной для ψ: $a\psi_u + b\psi_v = 0$.

Так как из уравнения ударной поляры

$$v_+ - v_- = \mp\sqrt{(L_+ - L_-)\,(u_+ - u_-)}, \quad L_+ = L(u_+), \quad L_- = L(u_-)$$

имеем

$$\left(\frac{dv_+}{du_+}\right)_c = \mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{[u]}{[L]}}\left\{k_+ + \frac{[L]}{[u]}\right\},$$

то

$$2b = 3k_+ + \frac{[L]}{[u]}, \quad 2a = \mp\left(k_+\sqrt{\frac{[u]}{[L]}} + 3\sqrt{\frac{[L]}{[u]}}\right). \tag{4}$$

Для криволинейного скачка в однородном потоке Л. Крокко (L. Crocco) в 1937 г. ввел понятие «ежевидной» поляры. Для наклона «иголки» на поляре (образа линии тока $0 = d\psi = \psi_u\, du + \psi_v\, dv$ на плоскости (v, u)), который характеризует кривизну линии тока на скачке, имеем: $(dv/du)_{\text{иг}} = -\psi_u/\psi_v = b/a$.

Функции u и L представимы (см. [1]) интегралами по $\tau = V^2 V_{max}^{-2} < 1$:

$$u = u(\tau\backslash\tau_*) = c\int\limits_{\tau_*}^{\tau}\frac{(1-\tau)^\beta}{2\tau}\,d\tau,$$

$$L = L(\tau\backslash\tau_*) = c\int\limits_{\tau_*}^{\tau}\frac{-1+(2\beta+1)\tau}{2\tau(1-\tau)^{\beta+1}}\,d\tau \geq 0, \tag{5}$$

$$\tau_* = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} > 0, \quad 0 < \tau < 1, \quad \beta = \frac{1}{\gamma-1} > 0,$$

$$k = k(\tau) = \frac{-1+(2\beta+1)\tau}{(1-\tau)^{2\beta+1}}.$$

Если $\gamma = 1 + 2/m$, где m – число степеней свободы молекулы газа (без колебательных степеней свободы), то интегралы в (5) вычисляются аналитически. Из интеграла Бернули для числа Маха M имеем связь с τ: $(\gamma-1)M^2 = 2\tau/(1-\tau)$.

Пусть в однородном сверхзвуковом потоке с $M_\infty > 1$, V_∞, $\theta_\infty = 0$ (ось $Ox\,||\,\overline{V}_\infty$) два косых скачка A_+O $(y \geq 0)$ и A_-O $(y \leq 0)$ в точке $O(0,0)$ преломляются в виде косых скачков OB_+ $(y \geq 0)$ и OB_-. За ними в однородном дозвуковом потоке $M_2 \leq 1$, θ_2, p_2, V_2. Углы падения обозначим $\omega_+ > 0$, $\omega_- > 0$, углы преломления $\omega'_+ > 0$, $\omega'_- > 0$ (индекс «+» для величин при $y \geq 0$; «−» для $y \leq 0$). Между скачками наклонные однородные сверхзвуковые потоки имеют $M_{1\pm} > 1$, $\theta_{1\pm}$.

Интенсивности падающих скачков $\xi_\pm = p_\infty/p_{1\pm} < 1$; для преломленных скачков $\xi'_\pm = p_2/p_{1\pm} > 1$ (p – давление в газе).

Пусть дано M_∞, γ, θ_2 (параметр несимметрии). Требуется найти остальные параметры. На плоскости (v,u) вершины двух малых ударных поляр (u_{1+} и u_{1-}) лежат на большой поляре ($u_\infty > 0$, $v_\infty = 0$). (v_2, u_2) – верхняя точка пересечения малых поляр, при этом в ней наклоны b/a иголок двух поляр должны быть одинаковы (кривизны линий тока в O одинаковы). Тогда для τ_2, τ_{1+}, τ_{1-} имеют место три уравнения (v_2 задано):

$$
\begin{gathered}
v_2 = \sqrt{L(\tau_{1+}\backslash\tau_2)\ u(\tau_{1+}\backslash\tau_2)} - \sqrt{L(\tau_\infty\backslash\tau_{1+})\ u(\tau_\infty\backslash\tau_{1+})},\\
v_2 = \sqrt{L(\tau_\infty\backslash\tau_{1-})\ u(\tau_\infty\backslash\tau_{1-})} - \sqrt{L(\tau_{1-}\backslash\tau_2)\ u(\tau_{1-}\backslash\tau_2)},\\
-\frac{3k(\tau_2)+W(\tau_{1+}\backslash\tau_2)}{k(\tau_2)+3W(\tau_{1+}\backslash\tau_2)}\sqrt{W(\tau_{1+}\backslash\tau_2)} = \frac{3k(\tau_2)+W(\tau_{1-}\backslash\tau_2)}{k(\tau_2)+3W(\tau_{1-}\backslash\tau_2)}\sqrt{W(\tau_{1-}\backslash\tau_2)},
\end{gathered}
\tag{6}
$$

где введено обозначение: $W(x\backslash y) = L(x\backslash y)/u(x\backslash y)$.

После решения системы определяем другие параметры:

$$
c\theta_{1+} = v_{1+} = -\sqrt{L(\tau_\infty\backslash\tau_{1+})\ u(\tau_\infty\backslash\tau_{1+})} < 0,
$$

$$
v_{1-} = \sqrt{L(\tau_\infty\backslash\tau_{1-})\ u(\tau_\infty\backslash\tau_{1-})} > 0,
$$

$$
\mathrm{tg}\omega_\pm = \frac{1-\sqrt{\dfrac{\tau_{1\pm}}{\tau_\infty}}\cos(\theta_{1\pm})}{\sqrt{\dfrac{\tau_{1\pm}}{\tau_\infty}}\sin(|\theta_{1\pm}|)},
$$

$$
\mathrm{tg}\omega'_\pm = \frac{\sqrt{\dfrac{\tau_{1\pm}}{\tau_\infty}}\cos\theta_{1\pm} - \sqrt{\dfrac{\tau_2}{\tau_\infty}}\cos\theta_2}{\sqrt{\dfrac{\tau_{1\pm}}{\tau_\infty}}\sin|\theta_{1\pm}| \pm \sqrt{\dfrac{\tau_2}{\tau_\infty}}\sin\theta_2},
$$

$$
\xi_\pm = \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1}M_\infty^2\sin^2(\omega_\pm) - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^{-1},
$$

$$
\xi'_\pm = \frac{2\gamma}{\gamma+1}M_{1\pm}^2\sin^2(\omega'_\pm + |\theta_{1\pm}|) - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}.
$$

При изменении параметра v_2 (или угла θ_2) точка (v_2, u_2) на плоскости (v,u) вычерчивает «пояс» большой поляры (при $v_2 = 0$ имеем точку Крокко для регулярного отражения косого скачка от стенки [2]), его концы – звуковые точки, в которых исчезает одна малая поляра. Сход с пояса приводит к теоретическому «жидкому клину».

В околозвуковой теории взаимодействия скачков ($M \approx 1$, $u \approx 0$) [3,4]:

$$k(u) = u, \quad L(u) = \frac{u^2}{2}, \quad [v] = \mp < u > [u];$$

$$2b = 3u_+ + < u >, \quad 2a = \pm \left(\frac{u_+}{< u >} + 3 < u > \right),$$

$$< u >= \frac{u_+ + u_-}{2},$$

и уравнения (6) упрощаются.

Расчет параметров потока при $v_2 = 0$ показывает (см. [2]) удовлетворительное приближение к экспериментальным значениям (не очень надежным) (в [5–7] дана библиография по данной задаче).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика : в 2 ч. 4-е изд. М. : Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1963. Ч. 2.

2. *Севостьянов Г. Д.* Метод расчета параметров регулярного отражения косого скачка от стенки// Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2008. Вып. 10. С. 140–143.

3. *Севостьянов Г. Д.* Регулярное несимметричное взаимодействие околозвуковых скачков// Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2002. Вып. 4. С. 219–222.

4. *Севостьянов Г. Д.* Регулярное несимметричное пересечение косых околозвуковых скачков// Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2003. Вып. 5. С. 184–186.

5. Основы газовой динамики / под ред. Г. Эммонса. М. : Изд-во иностр. лит., 1963.

6. *Баженова Т. В., Гвоздева Л. Г.* Нестационарные взаимодействия ударных волн. М. : Наука, 1977.

7. Ударные и детонационные волны. Методы исследования. 2-е изд., доп. и пераб. М. : Физматлит, 2004.