БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Kunyvskii B. E., Moroz B. Z., Voskresenskii V. E.* On integral models of an algebraic torus / Max-Planck-Institut fur Mathematik. Preprint Series. 2001. №12.

2. *Popov S. Yu., Voskresenskii V. E.* Galois lattices and reduction of algebraic tori//Communications of Algebra. 2001. № 9. P. 213–223.

3. *Водолазов А. М.* Целые модели разложимых алгебраических торов бесконечного типа //Современные проблемы алгебры, теории чисел и функционального анализа: межвуз. сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2003. Вып. 1. С. 14–23.

4. *Bhargava M., Cahen P.-J., Yeramian J.*Finite generation properties for various rings of integer-valued polynomials // J. of Algebra. 2009. Vol. 322, № 4. P. 1129–1150.

УДК 517.518.82

И. Ю. Выгодчикова

О ЗАДАЧЕ РАВНОМЕРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РИСКА ФИНАНСОВОГО ПОРТФЕЛЯ

Пусть θ_i – доли активов n видов, из которых инвестор формирует портфель, b_i, $i = \overline{1, s}$, $s \le n$ – ограничения на доли активов, заставляющие инвестора отказаться от подневольного желания «получить высокий доход любой ценой» и учесть неценовые оценки качества активов. В качестве рисковых показателей σ_i могут выступать среднеквадратические отклонения доходностей, либо иные показатели негативного для инвестора характера.

Требуется равномерно распределить риски (σ_i) между всеми активами, взвесив их по долям активов в портфеле, за счёт выбора этих долей:

$$\Psi(\theta) := \max_{i=\overline{1,n}} \sigma_i\theta_i \longrightarrow \min_{\theta\in D}, \tag{1}$$

$$D = \left\{ \theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} \theta_i = 1,\, \theta_i \le b_i, i = \overline{1, s} \right\}. \tag{2}$$

В [1] решена задача равномерного распределения риска с целевой функцией (1) и такими же ограничениями, как в известной задаче минимизации риска финансового портфеля Г. Марковица.

Теорема 1. *Решение задачи (1),(2) существует тогда и только тогда, когда либо $s < n$, либо $s = n$ и $\sum_{i=1}^{n} b_i \ge 1$.*

Доказательство. 1. При $s = n$ множество D не пусто тогда и только тогда, когда выполняется неравенство $\sum_{i=1}^{n} b_i \geq 1$, например, $\theta = \left(b_1, \ldots, b_{n-1}, 1 - \sum_{i=1}^{n-1} b_i\right) \in D$, а при $s < n$ множество D не пусто для любых b_i, например, $\theta = \left(b_1, \ldots, b_s, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-s-1}, 1 - \sum_{i=1}^{s} b_i\right) \in D$.

2. Возьмём произвольно $\tilde{\theta} \in D$, положим $D_0 := \left\{\theta = (\theta_1, ..., \theta_n) : 1 - \Psi(\tilde{\theta}) \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \sigma_i^{-1} \leq \theta_i \leq \min\left\{\Psi(\tilde{\theta})/\sigma_i, b_i\right\}, i = \overline{1, n}\right\}$. Левая часть i-го неравенства, $i = \overline{1, n}$, – результат подстановки $\theta_j \leq \Psi(\tilde{\theta})/\sigma_j$, $j = \overline{1, n} \setminus \{i\}$ в соотношение $\sum_{j=1}^{n} \theta_j = 1$. Ясно, что решение задачи (1–2) совпадает с решением задачи: $\Psi(\theta) \longrightarrow \min_{\theta \in D_0}$, причём $\tilde{\theta} \in D_0$. Поскольку функция $\Psi(\cdot)$ непрерывна, а множество D_0 не пусто, ограничено и замкнуто, то решение задачи существует.

Теорема доказана.

Далее, если только $s = n$, считаем, что $\sum_{i=1}^{n} b_i \geq 1$. Положим $\nu = \sum_{i=1}^{n} {\sigma_i}^{-1}$. Рассмотрим следующие надмножества множества D:

$$D(0) = \left\{\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} \theta_i = 1\right\}, \tag{3}$$

$$D(l) = \left\{\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} \theta_i = 1,\, \theta_l \leq b_l\right\}, l \in \overline{1, s}. \tag{4}$$

Рассмотрим задачу

$$\max_{i=\overline{1,n}} \sigma_i \theta_i \longrightarrow \min_{\theta \in D(0)} . \tag{5}$$

Следующее утверждение очевидно.

Теорема 2. *Решением задачи (5), а также задачи (1),(2), при выполнении неравенства*

$$\max_{j=\overline{1,s}} \left(1/\left(\sigma_j \nu\right) - b_j\right) \leq 0 \tag{6}$$

является вектор $\theta^* = ({\theta_1}^*, \ldots, {\theta_n}^*)$: $\theta_i^* = 1/\left(\sigma_i \nu\right)$, $i = \overline{1, n}$.

Для $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n) \in \mathbb{R}^n$ обозначим $I(\theta) = \left\{i = \overline{1, n} : \Psi(\theta) = \sigma_i \theta_i\right\}$, $IB(\theta) = \left\{j = \overline{1, s} : \theta_i = b_i\right\}$.

Лемма 1. *Пусть вектор $\theta \in D$ является решением задачи (1),(2). Тогда $I(\theta) \cup IB(\theta) = \overline{1, n}$.*

Доказательство. Предположим, что $\exists i_0 \in \overline{1,n} \setminus \{I(\theta) \cup IB(\theta)\}$. При малом $\varepsilon > 0$ вектор $\theta^\varepsilon = (\theta_1^\varepsilon, \ldots, \theta_n^\varepsilon) : \theta_{i_0}^\varepsilon = \theta_{i_0} + \varepsilon, \theta_i^\varepsilon = \theta_i - \varepsilon/(n-1)$, $i = \overline{1,n} \setminus \{i_0\}$, принадлежит множеству D, причем $\Psi(\theta^\varepsilon) < \Psi(\theta)$, что противоречит оптимальности θ.

Лемма доказана.

Рассмотрим задачу

$$\max_{i=\overline{1,n}} \sigma_i \theta_i \longrightarrow \min_{\theta \in D(l)} . \tag{7}$$

Теорема 3. *1. При* $1/(\sigma_l \nu) - b_l \leq 0$ *решением задачи (7) будет вектор* $\theta^* = ({\theta_1}^*, \ldots, {\theta_n}^*)$*:* $\theta_i^* = 1/(\sigma_i \nu)$, $i = \overline{1,n}$. *2. При* $1/(\sigma_l \nu) - b_l > 0$ *решением задачи (7) будет вектор вектор* $\theta^* = ({\theta_1}^*, \ldots, {\theta_n}^*)$*:*

$$\theta_l^* = b_l, \theta_i^* = (1 - b_l) \Big/ \left(1 + \sum_{j=1, j \neq i, j \neq l}^{n} \sigma_i/\sigma_j \right), i \in \overline{1,n} \setminus \{l\}. \tag{8}$$

Доказательство. По теореме 1 решение задачи (7) существует. Случай $1/(\sigma_l \nu) - b_l \leq 0$ рассмотрен в теореме 2. Пусть $1/(\sigma_l \nu) - b_l > 0$. В силу леммы 1 и ввиду $I(\theta^*) \neq \overline{1,n}$ имеем $IB(\theta^*) = \{l\}$, $I(\theta^*) = \overline{1,n} \setminus \{l\}$, то есть $\theta_l^* = b_l$, $\theta_i^* \sigma_i^* / \theta_j^* \sigma_j^* = 1$, $i, j = \overline{1,n} \setminus \{l\}$, $\sum_{i=1}^n \theta_i^* = 1$, откуда получаем (8).

Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть* $l \in \overline{1,s}$ *удовлетворяет двойному неравенству*

$$\max_{i=\overline{1,s} \setminus \{l\}} (b_l/b_i) \Big/ \left(1 + \sum_{j=1, j \neq i, j \neq l}^{n} \sigma_i/\sigma_j + b_l/b_i \right) < b_l < 1/(\sigma_l \nu). \tag{9}$$

Тогда решением задачи (1),(2) будет вектор $\theta^* = ({\theta_1}^*, \ldots, {\theta_n}^*)$*, компоненты которого определены в (8).*

Доказательство. По теореме 3 вектор с компонентами, определёнными в (8), будет решением задачи (7). Покажем, что он будет и решением задачи (1),(2). Оценим $\forall i = \overline{1,s} \setminus \{l\}$, $\theta_i^* - b_i =$ $= \left(1 - b_i \left(1 + \sum_{j=1, j \neq i, j \neq l}^{n} \sigma_i/\sigma_j + b_l/b_i\right)\right) / \left(1 + \sum_{j=1, j \neq i, j \neq l}^{n} \sigma_i/\sigma_j\right) \overset{(9)}{<} 0$.

Итак, θ^*, являясь решением задачи (7), принадлежит множеству $D \subset$ $\subset D(l)$, следовательно, $\min_{\theta \in D} \Psi(\theta) = \min_{\theta \in D(l)} \Psi(\theta) = \Psi(\theta^*)$.

Что и требовалось доказать.

Пример. Пусть $n = 3$, $\sigma_1 = 5, \sigma_2 = 4, \sigma_3 = 1$, $b_1 = 0.25, b_2 = 0.4$, $b_3 = 0.5$. Выполняется (9) для l=3, $\theta^* = (2/9, 5/18, 1/2)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (проект НШ-4383.2010.1).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Выгодчикова И. Ю.* О формировании портфеля ценных бумаг с равномерно распределённым риском // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2010. Вып. 12. С. 18–20.

УДК 514.764

С. В. Галаев

О ПРОДОЛЖЕНИИ ВНУТРЕННЕЙ СВЯЗНОСТИ НЕГОЛОНОМНОГО МНОГООБРАЗИЯ С ФИНСЛЕРОВОЙ МЕТРИКОЙ

В статье вводятся понятия *внутренней связности и продолженной связности неголономного многообразия* коразмерности 1. Для случая контактного пространства с финслеровой метрикой доказывается существование и единственность метрической продолженной связности. Тензор кривизны продолженной метрической связности в случае неголономного многообразия с римановой метрикой оказывается равным тензору кривизны Вагнера, построенного им для произвольного неголономного многообразия коразмерности 1 с внутренней аффинной связностью [1]. Подробные доказательства всех сформулированных утверждений содержатся в [2].

Введение. В качестве обобщения известного подхода к определению связности с помощью горизонтального распределения, заданного на касательном расслоении к гладкому многообразию X в работе [3] вводится понятие *связности над распределением.* В [4] аналогичный объект называется *связностью на расслоении вдоль распределения на базе.* Неголономное многообразие есть гладкое многообразие с заданным на нем распределением D. Это распределение, в ряде случаев называемое неголономным многообразием, вообще говоря, неинтегрируемо. Понятие внутренней геометрии неголономного многообразия было введено Вагнером (см. [4]). Развивая геометрию неголономных многообразий, В. В. Вагнер вводит понятие внутренней геометрии неголономного многообразия как совокупности тех свойств объектов, заданных в неголономном многообразии, которые зависят только от самого неголономного многообразия и от его оснащения [5]. Параллельный перенос внутри неголономного многообразия осуществляется с помощью связности ∇, которую, следуя терминологии В. В. Вагнера, мы называем *внутренней связностью неголономного многообразия.* Помимо внутренней связности в ряде работ рас-