БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Орел А.А.* Моделирование бизнес-процессов с помощью сетей Петри // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та. 2005. Вып. 7. С. 89–93.

2. *Марка Д.А., МакГоуэн К.* Методология структурного анализа и проектирования. М.: МетаТехнология, 1993.

3. *Starego D.* Modelowanie systemu funkcjonowania biblioteki za pomocą sieci Petriego. Referat wygłoszony na IV środowiskowej konferencji matematycznej Rzeszów-Czudec, listopad, 1997. `http://danstar.republika.pl/publik/modelow.html`

УДК 517.54

Е.В. Разумовская, А.В. Володченко

ОБ ОДНОМ КОЭФФИЦИЕНТНОМ ФУНКЦИОНАЛЕ НА КЛАССАХ ОДНОЛИСТНЫХ ОГРАНИЧЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть C – класс функций Каратеодори $p(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + ...$ Обозначим через $C(\alpha, \gamma)$, $0 \leq \alpha < 1$, $0 \leq \gamma \leq 1/(1-\alpha)$, подкласс всех функций C $h(z) = 1 + h_1 z + h_2 z^2 + ...$, таких, что $h(z) = \frac{1-\gamma}{(1-\alpha)p(z)+\alpha} + \gamma, p(z) \in C$.

Зафиксируем M, $1 < M < \infty$. Пусть $C_t(\alpha, \gamma)$ – класс всех функций $h(z,t)$, определенных на множестве $E \times [0, \log M]$, удовлетворяющих условию $h(.,t) \in C(\alpha,\gamma)$ для почти всех $t \in [0, \log M]$; $h(w,.)$ измерима на $[0, \log M]$, $w \in E = \{z : |z| < 1\}$. Будем говорить, если $f(z) \in S^M(\alpha,\gamma)$, то она может быть представлена в виде $f(z) = Mf(z, \log M, h), h \in C_t(\alpha,\gamma)$, где $f(z,t,h)$ – решение дифференциального уравнения

$$\frac{dw}{dt} = -wh(w,t), t \in [0, \log M], w|_{t=0} = z, z \in E.$$

Такие классы функций при некоторых параметрах α, γ, M совпадают с классами функций, введенными В.Я. Гутлянским [1]. В таких классах рассмотрим задачу о нахождении множества значений системы функционалов $I_1(f) = (\operatorname{Re} a_2, \operatorname{Im} a_2, \operatorname{Re} a_2 a_3)$. Похожие функционалы в данных классах исследовались в работах А.Ю. Васильева [2, 3]. Основным результатам предпошлем лемму.

Лемма. *Пусть* $p(z) \in C$. *Тогда множество значений* $(\operatorname{Re} p_1, \operatorname{Im} p_2, \operatorname{Re} p_2)$ *задается условиями* $|p_1| \leq 2$,

$$\max_{p\in C} \operatorname{Re} p_2(p_1) = 2 - (\operatorname{Im} p_1)^2, \min_{p\in C} \operatorname{Re} p_2(p_1) = -2 + (\operatorname{Re} p_1)^2,$$

$$\max_{p\in C} \operatorname{Im} p_2(p_1) = 2 - \frac{(\operatorname{Re} p_1 - \operatorname{Im} p_1)^2}{2}, \min_{p\in C} \operatorname{Im} p_2(p_1) = \frac{(\operatorname{Re} p_1 + \operatorname{Im} p_1)^2}{2} - 2.$$

Точки $\pm\max\left(\pm\operatorname{Re}p_2\left(p_1\right)\right)$ и $\pm\max\left(\pm\operatorname{Im}p_2\left(p_1\right)\right)$ доставляются двупараметрическим семейством функций

$$p^{\pm}\left(z\right)=\frac{\left(1+\frac{\overline{p_1}}{2}+z\left(1+\frac{p_1}{2}\right)\right)\frac{1\pm z}{1\mp z}+1-\frac{\overline{p_1}}{2}+z\left(\frac{p_1}{2}-1\right)}{\left(1+\frac{\overline{p_1}}{2}-z\left(1+\frac{p_1}{2}\right)\right)\frac{1\pm z}{1\mp z}+1-\frac{\overline{p_1}}{2}-z\left(\frac{p_1}{2}-1\right)}. \qquad (1)$$

Следствие. *Пусть* $h\left(z\right)\in C\left(\alpha,\gamma\right)$. *Тогда множество значений* $\left(\operatorname{Re}h_1,\operatorname{Im}h_1,\operatorname{Re}h_2,\operatorname{Im}h_2\right)$ *задается условиями:*

$$\max_{h\in C(\alpha,\gamma)}\operatorname{Re}h_2\left(h_1\right)=$$

$$=\begin{cases}2\left(1-\alpha\right)\left(1-\gamma\right)-\frac{\left(\operatorname{Re}h_1\right)^2\alpha}{(1-\alpha)(1-\gamma)}-\frac{\left(\operatorname{Im}h_1\right)^2}{1-\gamma}, 0\le\gamma\le 1;\\ 2\left(1-\alpha\right)\left(\gamma-1\right)-\frac{\left(\operatorname{Im}h_1\right)^2\alpha}{(1-\alpha)(\gamma-1)}-\frac{\left(\operatorname{Re}h_1\right)^2}{\gamma-1}, 1\le\gamma\le\frac{1}{1-\alpha};\end{cases}$$

$$\max_{h\in C(\alpha,\gamma)}\operatorname{Im}h_2(h_1)=$$

$$=\begin{cases}2\left(1-\gamma\right)\left(1-\alpha\right)-\frac{\left(\operatorname{Re}h_1-\operatorname{Im}h_1\right)^2}{2(1-\gamma)(1-\alpha)}-\frac{2\alpha\operatorname{Re}h_1\operatorname{Im}h_1}{(1-\gamma)(1-\alpha)}, 0\le\gamma\le 1;\\ 2\left(\gamma-1\right)\left(1-\alpha\right)-\frac{\left(\operatorname{Re}h_1+\operatorname{Im}h_1\right)^2}{2(\gamma-1)(1-\alpha)}+\frac{2\alpha\operatorname{Re}h_1\operatorname{Im}h_1}{(\gamma-1)(1-\alpha)}, 1\le\gamma\le\frac{1}{1-\alpha};\end{cases}$$

$$\min_{h\in C(\alpha,\gamma)}\operatorname{Re}h_2\left(h_1\right)=$$

$$\begin{cases}-2\left(1-\alpha\right)\left(1-\gamma\right)+\frac{\left(\operatorname{Im}h_1\right)^2\alpha}{(1-\alpha)(1-\gamma)}+\frac{\left(\operatorname{Re}h_1\right)^2}{1-\gamma}, 0\le\gamma\le 1;\\ -2\left(1-\alpha\right)\left(\gamma-1\right)+\frac{\left(\operatorname{Re}h_1\right)^2\alpha}{(1-\alpha)(\gamma-1)}+\frac{\left(\operatorname{Im}h_1\right)^2}{\gamma-1}, 1\le\gamma\le\frac{1}{1-\alpha};\end{cases}$$

$$\min_{h\in C(\alpha,\gamma)}\operatorname{Im}h_2(h_1)=$$

$$=\begin{cases}-2\left(1-\gamma\right)\left(1-\alpha\right)+\frac{\left(\operatorname{Re}h_1+\operatorname{Im}h_1\right)^2}{2(1-\gamma)(1-\alpha)}-\frac{2\alpha\operatorname{Re}h_1\operatorname{Im}h_1}{(1-\gamma)(1-\alpha)}, 0\le\gamma\le 1;\\ -2\left(\gamma-1\right)\left(1-\alpha\right)+\frac{\left(\operatorname{Re}h_1-\operatorname{Im}h_1\right)^2}{2(\gamma-1)(1-\alpha)}+\frac{2\alpha\operatorname{Re}h_1\operatorname{Im}h_1}{(\gamma-1)(1-\alpha)}, 1\le\gamma\le\frac{1}{1-\alpha}.\end{cases}$$

Точки $\pm\max\left(\pm\operatorname{Re}h_2\left(h_1\right)\right)$ и $\pm\max\left(\pm\operatorname{Im}h_2\left(h_1\right)\right)$ доставляются двупараметрическим семейством функций

$$h^{\pm}\left(z\right)=\frac{1-\gamma}{\left(1-\alpha\right)p^{\pm}\left(z\right)+\alpha}+\gamma. \qquad (2)$$

Рассмотрим поставленную задачу как задачу оптимального управления. Пусть $0\le\gamma\le 1$. Будем решать задачу об экстремуме $\operatorname{Re}a_2a_3$ при фиксированном a_2. Пусть вектор фазовых координат $\left(x_1\left(t\right),x_2\left(t\right),x_3\left(t\right),x_4\left(t\right)\right)=\left(\operatorname{Re}a_2\left(t\right),\operatorname{Im}a_2\left(t\right),\operatorname{Re}a_3\left(t\right),\operatorname{Im}a_3\left(t\right)\right)$ и вектор управлений

$(u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t)) = (\mathrm{Re}\, h_1(t), \mathrm{Im}\, h_1(t), \mathrm{Re}\, h_2(t), \mathrm{Im}\, h_2(t))$. Обозначим через G множество значений $(\mathrm{Re}\, h_1, \mathrm{Im}\, h_1, \mathrm{Re}\, h_2, \mathrm{Im}\, h_2)$, описанное в следствии. Равенства для x_1, x_2, x_3,x_4 можно записать в виде дифференциальных уравнений связи с начальными условиями

$$\frac{dx_1}{dt} = -u_1(t)\, e^{-t} = f_1, \quad x_1(0) = 0, \tag{3}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -u_2(t)\, e^{-t} = f_2, \quad x_2(0) = 0, \tag{4}$$

$$\frac{dx_3}{dt} = -2u_1(t)\, e^{-t} x_1(t) + 2u_2 x_2 e^{-t} - u_3(t)\, e^{-2t} = f_3, \quad x_3(0) = 0; \tag{5}$$

$$\frac{dx_4}{dt} = -2u_1(t)\, x_2(t)\, e^{-t} - 2u_2(t)\, x_1(t)\, e^{-t} - u_4(t)\, e^{-2t}, \quad x_4(0) = 0. \tag{6}$$

Будем искать максимум $\mathrm{Re}\, a_2 a_3$ при наличии дифференциальных уравнений (3) – (6) и условий $x_1(\log M) = \mathrm{Re}\, a_2, x_2(\log M) = \mathrm{Im}\, a_2, x_3(\log M) = \mathrm{Re}\, a_3, x_4(\log M) = \mathrm{Im}\, a_3$. Компактность класса $S^M(\alpha, \gamma)$, на котором рассматривается экстремальная задача, гарантирует существование экстремальной функции, что в свою очередь, обеспечивает существования оптимального управления $\overline{u}$. Последнее удовлетворяет принципу максимума Л.С.Понтрягина, то есть при почти всех $t \in [0, \log M]$ доставляет абсолютный максимум по $\overline{u}$ функции Гамильтона

$$H\left(t, \overline{u}, \overline{x}, \overline{\psi}\right) = \psi_0 f_0 + \psi_1 f_1 + \psi_2 f_2 + \psi_3 f_3 + \psi_4 f_4, \tag{7}$$

где $\overline{\psi} = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)$ является решением сопряженной гамильтоновой системы. Без ограничения общности будем считать $\psi_0 = +1$ в задаче $\mathrm{Re}\, a_2 a_3 \to \max$. Тогда после интегрирования

$$\psi_1(t) = -\psi_0 x_3 - 2x_1 c_3 - 2x_2 c_4 + c_1, \psi_2(t) = \psi_0 x_4(t) + 2x_2 c_3 - 2x_1 c_4 + c_2,$$

$$\psi_3 = -\psi_0 x_1 + c_3, \psi_4 = \psi_0 x_2 + c_4.$$

Функция Гамильтона $H = -u_1 c_1 e^{-t} - u_2 c_2 e^{-t} - u_3 c_3 e^{-2t} - u_4 c_4 e^{-2t}$. Так как $\frac{\partial H}{\partial u_i} = -c_i e^{-t}, i = 1, 2,$ $\frac{\partial H}{\partial u_j} = -c_j e^{-2t}, j = 3, 4$, не обращаются в нуль, то максимальное значение функции Гамильтона достигается на границе множества G. Введем обозначения: $u_3^* = \max \mathrm{Re}\, h_2(h_1), u_4^* = \max \mathrm{Im}\, h_2(h_1)$.

Рассмотрим $H^* = H(u_1, u_2, u_3^*, u_4^*)$. Максимум функции H^* по u_1, u_2 на множестве $\tilde{G} : \{|h_1| < 2(1-\alpha)|1-\gamma|\}$, то есть $\tilde{G} = \left\{u_1^2 + u_2^2 < 4(1-\alpha)^2(1-\gamma)^2\right\}$ доставляет управление

$$u_1^0 = e^{-t}\frac{(1-\alpha)(1-\gamma)(c_2c_4(1+2\alpha) + c_1c_4 + 2(1-\alpha)c_1c_3)}{(4\alpha((1-\alpha)c_3^2 - (1+\alpha)c_4^2) + 2c_4c_3)}e^t = L_1e^t,$$

$$u_2^0 = \frac{(1-\alpha)(1-\gamma)(c_1c_4(1+2\alpha) + c_2c_4 + 2\alpha c_2c_3)}{(4\alpha((1-\alpha)c_3^2 - (1+\alpha)c_4^2) + 2c_4c_3)}e^t = L_2e^t$$

при выборе начальных условий c_i из области: $\{c_3 < 0, c_4 < \frac{1+\sqrt{1\alpha^2-16\alpha^4+1}}{4\alpha(1+\alpha)}c_3\}$. Окончательный итог формулируется в следующей теореме.

Теорема. *Для множества значений системы функционалов $I_1(f) = (\operatorname{Re} a_2, \operatorname{Im} a_2, \operatorname{Re} a_2a_3)$ в классе $S^M(\alpha, \gamma)$ справедливы следующие оценки:*

Пусть $0 \le \gamma \le 1, L_1^2 + L_2^2 \le \frac{4(1-\alpha)^2(1-\gamma)^2}{M^2}$, тогда $a_2 = -L_1 \log M - iL_2 \log M$,

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} a_2a_3 \le {} & -L_1\left(L_1^2 - L_2^2\right)\log^3 M - \\ & - L_1(1-\alpha)(1-\gamma)\left(\frac{1}{M^2} - 1\right)\log M - \frac{\alpha L_1^2 + (1-\alpha)L_2^2}{(1-\alpha)(1-\gamma)}L_1\log^2 M + \\ & + 2L_1L_2^2\log^3 M + (1-\alpha)(1-\gamma)\left(\frac{1}{M^2} - 1\right)L_2\log M + \\ & + \frac{(L_1 - L_2)^2 - 4\alpha L_1L_2}{2(1-\alpha)(1-\gamma)}L_2\log^2 M.\end{aligned}$$

Пусть $1 \le \gamma \le \frac{1}{1-\alpha}, L_1^2 + L_2^2 \le \frac{4(1-\alpha)^2(1-\gamma)^2}{M^2}$, тогда $a_2 = -L_1 \log M - iL_2 \log M$,

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} a_2a_3 \ge {} & -L_1\left(L_1^2 - L_2^2\right)\log^3 M - \\ & - L_1(1-\alpha)(1-\gamma)\left(\frac{1}{M^2} - 1\right)\log M - \frac{\alpha L_1^2 + (1-\alpha)L_2^2}{(1-\alpha)(1-\gamma)}L_1\log^2 M + \\ & + 2L_1L_2^2\log^3 M + (1-\alpha)(1-\gamma)\left(\frac{1}{M^2} - 1\right)L_2\log M + \\ & + \frac{(L_1 - L_2)^2 - 4\alpha L_1L_2}{2(1-\alpha)(1-\gamma)}L_2\log^2 M.\end{aligned}$$

При каждом фиксированном значении (L_1, L_2) экстремальную точку доставляет единственная функция, представимая в виде (2), с использованием функции (1), где $p_1 = \frac{(L_1+iL_2)M}{(1-\alpha)(1-\gamma)}$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Гутлянский В.Я.* О некоторых классах однолистных аналитических функций // Теория функций и отображений. Киев: Наук. думка, 1979. Т. 194. С. 85-87.

2. *Васильев А.Ю.* Взаимное изменение начальных коэффициентов в подклассах однолистных функций // Выч. методы и программирование. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1985. С. 55-64.

3. *Васильев А.Ю.* Взаимное изменение начальных коэффициентов однолистных функций // Мат. заметки. 1985. Т.38, №1. С. 56-65.

УДК 519.4, 519.8

В.В. Розен

РЕШЕТКА МАЖОРАНТНО СТАБИЛЬНЫХ ПОДМНОЖЕСТВ УПОРЯДОЧЕННОГО МНОЖЕСТВА

1. Напомним, что подмножество упорядоченного множества называется мажорантно стабильным, если вместе с каждым элементом оно содержит и больший его элемент. Пусть $< A, \omega >$ – упорядоченное множество. Отображение, которое каждому подмножеству $B \subseteq A$ ставит в соответствие множество его мажорант $\breve{\omega}(B)$, является операцией замыкания, замкнутыми относительно которой будут, в точности, все мажорантно стабильные подмножества упорядоченного множества $< A, \omega >$. Поэтому семейство всех мажорантно стабильных подмножеств упорядоченного множества $< A, \omega >$ образует полную решетку относительно включения; она обозначается далее через $< M(\omega), \subseteq>$. Эта решетка обладает «хорошими» алгебраическими свойствами, в частности, она является вполне дистрибутивной и монокомпактно порожденной [1]. Двойственная ей полная решетка минорантно стабильных подмножеств есть $< M(\omega^{-1}), \subseteq>$. Отображение, которое каждому мажорантно стабильному подмножеству B ставит в соответствие его теоретико-множественное дополнение B', есть антиизоморфизм первой решетки на вторую. Указанные полные решетки являются важными производными структурами упорядоченного множества, которые встречаются в различных разделах математики, связанными со структурой порядка. Приведем несколько примеров, относящихся к задачам принятия решения с упорядоченным множеством исходов.

Пример 1. Антагонистическая игра с упорядоченными исходами представляет собой систему вида $G =< X, Y, A, \omega, F >$, где X есть множество стратегий игрока 1, Y – множество стратегий игрока 2, A – множество исходов, упорядоченное отношением порядка ω, $F\colon X \times Y \to A$ – функция реализации. Для антагонистических игр с упорядоченными исходами некоторые их аналоги, заимствованные из классической теории антагонистических игр с функциями выигрыша (оптимальные стратегии игроков, цена игры и