БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Гутлянский В.Я.* О некоторых классах однолистных аналитических функций // Теория функций и отображений. Киев: Наук. думка, 1979. Т. 194. С. 85-87.

2. *Васильев А.Ю.* Взаимное изменение начальных коэффициентов в подклассах однолистных функций // Выч. методы и программирование. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1985. С. 55-64.

3. *Васильев А.Ю.* Взаимное изменение начальных коэффициентов однолистных функций // Мат. заметки. 1985. Т.38, №1. С. 56-65.

УДК 519.4, 519.8

В.В. Розен

РЕШЕТКА МАЖОРАНТНО СТАБИЛЬНЫХ ПОДМНОЖЕСТВ УПОРЯДОЧЕННОГО МНОЖЕСТВА

1. Напомним, что подмножество упорядоченного множества называется мажорантно стабильным, если вместе с каждым элементом оно содержит и больший его элемент. Пусть $< A, \omega >$ – упорядоченное множество. Отображение, которое каждому подмножеству $B \subseteq A$ ставит в соответствие множество его мажорант $\breve{\omega}(B)$, является операцией замыкания, замкнутыми относительно которой будут, в точности, все мажорантно стабильные подмножества упорядоченного множества $< A, \omega >$. Поэтому семейство всех мажорантно стабильных подмножеств упорядоченного множества $< A, \omega >$ образует полную решетку относительно включения; она обозначается далее через $< M(\omega), \subseteq >$. Эта решетка обладает «хорошими» алгебраическими свойствами, в частности, она является вполне дистрибутивной и монокомпактно порожденной [1]. Двойственная ей полная решетка минорантно стабильных подмножеств есть $< M(\omega^{-1}), \subseteq >$. Отображение, которое каждому мажорантно стабильному подмножеству B ставит в соответствие его теоретико-множественное дополнение B', есть антиизоморфизм первой решетки на вторую. Указанные полные решетки являются важными производными структурами упорядоченного множества, которые встречаются в различных разделах математики, связанными со структурой порядка. Приведем несколько примеров, относящихся к задачам принятия решения с упорядоченным множеством исходов.

Пример 1. Антагонистическая игра с упорядоченными исходами представляет собой систему вида $G =< X, Y, A, \omega, F >$, где X есть множество стратегий игрока 1, Y – множество стратегий игрока 2, A – множество исходов, упорядоченное отношением порядка ω, $F\colon X \times Y \to A$ – функция реализации. Для антагонистических игр с упорядоченными исходами некоторые их аналоги, заимствованные из классической теории антагонистических игр с функциями выигрыша (оптимальные стратегии игроков, цена игры и др.), обладают рядом аномалий. Например, свойство стратегии «быть оптимальной» не сохраняется при изотонном преобразовании порядка или при добавлении несущественных исходов; игра может иметь цену, а двойственная ей игра - нет и т. п. В работе автора [2] показано, что указанные аномалии исчезают при «погружении» первоначального упорядоченного множества исходов игры $< A, \omega >$ в полную решетку $< M(\omega), \subseteq >$ ее мажорантно стабильных подмножеств.

Пример 2. В ряде задач принятия решений с упорядоченным множеством исходов возникает проблема продолжения упорядоченности на множество вероятностных мер. Обладающее «хорошими» математическими свойствами так называемое каноническое продолжение ϖ порядка ω на множество вероятностных мер $P_\omega(A)$ задается формулой

$$\mu \leq^{\varpi} \nu \Leftrightarrow (\forall \varphi \in C_0(\omega))\, \overline{\varphi}(\mu) \leq \overline{\varphi}(\nu),$$

где μ, $\nu \in P_\omega(A)$, $C_0(\omega)$ есть множество всех изотонных отображений упорядоченного множества $< A, \omega >$ в действительную прямую $\mathbf{R}$, $\overline{\varphi}$ – продолжение отображения φ на множество вероятностных мер: $\overline{\varphi}(\mu) = \int\limits_A \varphi d\mu$. В работе [3] установлено, что каноническое продолжение порядка ω на множество вероятностных мер может быть задано в явном виде следующим образом:

$$\mu \leq^{\varpi} \nu \Leftrightarrow (\forall B \in M(\omega))\, \mu(B) \leq \nu(B). \tag{1}$$

Формула (1) показывает, что упорядочение по каноническому продолжению ϖ «учитывает» лишь мажорантно стабильные подмножества упорядоченного множества $< A, \omega >$.

Пример 3. С помощью мажорантно стабильных подмножеств может быть дано описание всех изотонных отображений конечного упорядоченного множества в числовую прямую [4]. Припишем каждому мажорантно стабильному подмножеству B конечного упорядоченного множества $< A, \omega >$ некоторый неотрицательный вес $\lambda(B)$. Тогда отображение $\varphi\colon A \to \mathbf{R}$, определенное формулой

$$\varphi(a) = \sum_{a \in B} \lambda(B), \tag{2}$$

является изотонным. Обратно, любое изотонное отображение упорядоченного множества $< A, \omega >$ в $\mathbf{R}$ может быть представлено в виде (2) с точностью до константы. При этом если все $\lambda(B)$ строго положительны, равенство (2) дает все строго изотонные отображения из $< A, \omega >$ в $\mathbf{R}$ с точностью до константы.

2. В связи с приведенными выше примерами представляет интерес нахождение различных числовых характеристик упорядоченного множества

$< M(\omega), \subseteq>$. Как известно, важнейшими числовыми характеристиками конечного упорядоченного множества являются число его элементов, длина, ширина и размерность. В данной статье даются оценки указанных величин. При этом основную роль играет следующая

Теорема 1. *Пусть* $< A, \omega >$ *– конечное упорядоченное множество, имеющее наименьший элемент* 0. *Пусть* $(C_i)_{i \in I}$ *– семейство цепей, образующих покрытие множества* A*, причем каждая цепь* C_i *содержит* 0. *Тогда упорядоченное множество* $< M(\omega^{-1}), \subseteq>$ *изоморфно вкладывается в прямое произведение указанного семейства цепей, снабженное покомпонентным упорядочением.*

Доказательство теоремы основано на следующем утверждении, доказательство которого содержится в [5].

Лемма. Пусть Y – множество всех неразложимых в объединение элементов упорядоченного множества $< X, \leq>$, имеющего наименьший элемент. Рассмотрим разложение множества Y в объединение цепей $(Z_k)_{k \in K}$, каждая из которых содержит наименьший элемент: $Y = \bigcup Z_k$. Определим при каждом k отображение $\varphi_k \colon X \to Z_k$ равенством: $\varphi_k(x) = \sup\{y \in Z_k \colon y \leq x\}$. Тогда отображение $\varphi(x) = (\varphi_k(x))_{k \in K}$ является изоморфным вложением упорядоченного множества $< X, \leq>$ в прямое произведение семейства цепей $(Z_k)_{k \in K}$, снабженное покомпонентным упорядочением.

Перейдем к доказательству теоремы 1. Возьмем в условиях леммы в качестве $< X, \leq>$ упорядоченное множество $< M(\omega^{-1}), \subseteq>$ (при этом пустое множество принадлежит $M(\omega^{-1})$ и является в нем наименьшим элементом). Неразложимыми в объединение элементами упорядоченного множества $< M(\omega^{-1}), \subseteq>$ являются элементарные срезы $\omega^{-1} < a >$, где $a \in A$. (Заметим, что в алгебраической терминологии $M(\omega^{-1})$ есть множество идеалов упорядоченного множества $< A, \omega >$, причем идеалы вида $\omega^{-1} < a >$ суть, в точности, его главные идеалы.) Так как соответствие $a \mapsto \omega^{-1} < a >$ является изоморфизмом упорядоченного множества $< A, \omega >$ на упорядоченное множество всех главных идеалов, то разложению множества A в объединение цепей $(C_i)_{i \in I}$ будет соответствовать разложение в объединение цепей множества главных идеалов, то есть разложение в объединение цепей подмножества неразложимых в объединение элементов решетки $< M(\omega^{-1}), \subseteq>$. В силу леммы, отображение $\varphi(B) = (\varphi_i(B))_{i \in I}$, где $\varphi_i(B) = \sup\{a \in C_i \colon a \in B\}$, будет изоморфным вложением упорядоченного множества $< M(\omega^{-1}), \subseteq>$ в прямое произведение семейства цепей $(C_i)_{i \in I}$, снабженное покомпонентным порядком. Теорема доказана.

Для получения оценок числовых характеристик решетки $< M(\omega^{-1}), \subseteq>$ воспользуемся наиболее «экономным» представлением упорядоченного множества $< A, \omega >$ в виде объединения цепей, предложенным Дилуорсом. Согласно [6], наименьшее число цепей, в объединение которых разложимо упорядоченное множество, равно его ширине (то есть максимальной мощности его антицепи). Назовем такое разложение дилуорсовским.

В качестве следствий теоремы 1 можно получить оценки числовых характеристик решетки $< M(\omega), \subseteq>$. Пусть $A = \bigcup\limits_{i=1}^{m} C_i$ – дилуорсовское разложение упорядоченного множества $< A, \omega >$. Тогда справедливы следующие оценки.

Следствие 1. (оценка числа элементов решетки $< M(\omega), \subseteq>$, то есть числа мажорантно стабильных подмножеств упорядоченного множества $< A, \omega >$): $\mid M(\omega) \mid \leq \prod_{i=1}^{m} \mid C_i \mid$.

Следствие 2. (оценка длины l упорядоченного множества $< M(\omega), \subseteq>$): $l(M(\omega)) \leq \sum_{i=1}^{m} l(C_i)$.

Следствие 3. (оценка размерности dim упорядоченного множества $< M(\omega), \subseteq>$): $\dim M(\omega) \leq m$, где m – ширина упорядоченного множества $< A, \omega >$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Розен В.В.* Игры с упорядоченными исходами и монокомпактно порожденные решетки // Упорядоченные множества и решетки. Сб. науч. тр. 1978. Вып. 5. С. 90-97.
2. *Розен В.В.* Порядковые инварианты и проблема «окружения» для игр с упорядоченными исходами // Кибернетика и системный анализ. 2001. №2. С. 145-159.
3. *Розен В.В.* Вложения упорядоченных множеств в упорядоченные линейные пространства //Изв. вузов. Сер. Математика. 1998. №7 (434). С. 32-38.
4. *Розен В.В.* Представление изотонных отображений в виде сумм весов мажорантно-стабильных подмножеств // Математика. Механика. Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та. 2001. Вып. 3. С. 110-113.
5. *Розен В.В.* Кодирование упорядоченных множеств // Упорядоченные множества и решетки. Сб. науч. тр. 1991. Вып.10. С. 88-96.
6. *Айгнер М.* Комбинаторная теория. М.: Мир, 1982.

УДК 517.927.25

В.С. Рыхлов

О СВОЙСТВАХ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ПУЧКА ВТОРОГО ПОРЯДКА, КОРНИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ КОТОРОГО ЛЕЖАТ НА ПРЯМОЙ

Рассмотрим в пространстве $L_2[0,1]$ пучок операторов $L(\lambda)$, определяемый однородным дифференциальным выражением

$$\ell(y,\lambda) := y^{(2)} + \lambda p_1 y^{(1)} + \lambda^2 p_2 y$$