гласно [6], наименьшее число цепей, в объединение которых разложимо упорядоченное множество, равно его ширине (то есть максимальной мощности его антицепи). Назовем такое разложение дилуорсовским.

В качестве следствий теоремы 1 можно получить оценки числовых характеристик решетки $< M(\omega), \subseteq>$. Пусть $A = \bigcup\limits_{i=1}^{m} C_i$ – дилуорсовское разложение упорядоченного множества $< A, \omega >$. Тогда справедливы следующие оценки.

Следствие 1. (оценка числа элементов решетки $< M(\omega), \subseteq>$, то есть числа мажорантно стабильных подмножеств упорядоченного множества $< A, \omega >$): $\mid M(\omega) \mid \leq \prod_{i=1}^{m} \mid C_i \mid$.

Следствие 2. (оценка длины l упорядоченного множества $< M(\omega), \subseteq>$): $l(M(\omega)) \leq \sum_{i=1}^{m} l(C_i)$.

Следствие 3. (оценка размерности dim упорядоченного множества $< M(\omega), \subseteq>$): $\dim M(\omega) \leq m$, где m – ширина упорядоченного множества $< A, \omega >$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Розен В.В.* Игры с упорядоченными исходами и монокомпактно порожденные решетки // Упорядоченные множества и решетки. Сб. науч. тр. 1978. Вып. 5. С. 90-97.

2. *Розен В.В.* Порядковые инварианты и проблема «окружения» для игр с упорядоченными исходами // Кибернетика и системный анализ. 2001. №2. С. 145-159.

3. *Розен В.В.* Вложения упорядоченных множеств в упорядоченные линейные пространства //Изв. вузов. Сер. Математика. 1998. №7 (434). С. 32-38.

4. *Розен В.В.* Представление изотонных отображений в виде сумм весов мажорантно-стабильных подмножеств // Математика. Механика. Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та. 2001. Вып. 3. С. 110-113.

5. *Розен В.В.* Кодирование упорядоченных множеств // Упорядоченные множества и решетки. Сб. науч. тр. 1991. Вып.10. С. 88-96.

6. *Айгнер М.* Комбинаторная теория. М.: Мир, 1982.

УДК 517.927.25

В.С. Рыхлов

О СВОЙСТВАХ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ПУЧКА ВТОРОГО ПОРЯДКА, КОРНИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ КОТОРОГО ЛЕЖАТ НА ПРЯМОЙ

Рассмотрим в пространстве $L_2[0,1]$ пучок операторов $L(\lambda)$, определяемый однородным дифференциальным выражением

$$\ell(y,\lambda) := y^{(2)} + \lambda p_1 y^{(1)} + \lambda^2 p_2 y$$

и двухточечными однородными краевыми условиями

$$U_\nu(y,\lambda) = U_{\nu 0}(y,\lambda) + U_{\nu 1}(y,\lambda) :=$$

$$:= \big(\alpha_{\nu 1} y^{(1)}(0) + \lambda \alpha_{\nu 2} y(0)\big) + \big(\beta_{\nu 1} y^{(1)}(1) + \lambda \beta_{\nu 2} y(1)\big) = 0, \quad \nu = 1, 2,$$

где $p_j, \alpha_{\nu j}, \beta_{\nu j} \in \mathbb{C}$. В случае $\alpha_{\nu 1} = \beta_{\nu 1} = 0$ считаем, что краевое условие имеет вид $\alpha_{\nu 2} y(0) + \beta_{\nu 2} y(1) = 0$.

Обозначим через ω_1, ω_2 корни характеристического уравнения $\omega^2 + p_1\omega + p_2 = 0$ и предположим, что *корни ω_1, ω_2 отличны от нуля и лежат на одной прямой, проходящей через начало координат, по разные стороны от этого начала.* Не нарушая общности, можно считать

1^0**)** $\omega_2 < 0 < \omega_1$.

Обозначим $\tau := |\omega_2|/\omega_1 > 0$, $y_1(x,\lambda) = \exp(\lambda\omega_1 x)$, $y_2(x,\lambda) = \exp(\lambda\omega_2 x)$. Для определенности считаем $\alpha_{\nu 1} \neq 0$, $\beta_{\nu 1} \neq 0$. В остальных случаях рассуждения принципиально не отличаются. Обозначим $v_{\nu j} = U_{\nu 0}(y_j,\lambda)/\lambda$, $w_{\nu j} = \exp(-\lambda\omega_j) U_{\nu 1}(y_j,\lambda)/\lambda$ и $V_j = (v_{1j}, v_{2j})^T$, $W_j = (w_{1j}, w_{2j})^T$ $(\nu, j = 1, 2)$. Пусть $a_{sk} = \det(W_s, W_k)$, $a_{\bar{s}k} = \det(V_s, W_k)$, $a_{s\bar{k}} = \det(W_s, V_k)$, $a_{\bar{s}\bar{k}} = \det(V_s, V_k)$.

Характеристический определитель пучка имеет вид

$$\Delta(\lambda) = \det\big(U_\nu(y_j,\lambda)\big)_{\nu,j=1}^{2} =$$

$$= \lambda^2 \{a_{\bar{1}\bar{2}} + e^{\lambda\omega_1} a_{1\bar{2}} + e^{\lambda\omega_2} a_{\bar{1}2} + e^{\lambda(\omega_1+\omega_2)} a_{12}\} = \lambda^2 \Delta_0(\lambda).$$

Предположим, что всюду в дальнейшем выполняется условие

2^0**)** $a_{\bar{1}\bar{2}} \neq 0$, $a_{1\bar{2}} \neq 0$, $a_{\bar{1}2} = a_{12} = 0$.

При этом условии $\Delta_0(\lambda) = a_{\bar{1}\bar{2}} + e^{\lambda\omega_1} a_{1\bar{2}}$ и, следовательно, рассматриваемый пучок $L(\lambda)$ не является регулярным [1, с. 66–67] и, более того, не является нормальным по терминологии работы [2].

Очевидно, уравнение $\Delta_0(\lambda) = 0$ имеет счетное число простых корней, которые выражаются формулой

$$\lambda_k = (2k\pi i + d_0)/\omega_1, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

где $d_0 := \ln_0 c_0$ ($\ln_0$ есть фиксированная ветвь натурального логарифма, такая, что $\ln_0 1 = 0$), $c_0 := -a_{\bar{1}\bar{2}}/a_{1\bar{2}}$.

Обозначим $\Lambda := \{\lambda_k :\ k \in \mathbb{Z}\}$. Очевидно, $\Lambda \setminus \{0\}$ есть множество ненулевых собственных значений (с.з.) пучка $L(\lambda)$. Точка $\lambda = 0$ может быть с.з., а может и не быть, даже если $0 \in \Lambda$.

Справедливы следующие альтернативные условия:

3^0**)** $W_2 \neq 0$ или: $W_2 = 0$ и $a_{1\bar{1}} = 0$;

4^0**)** $W_2 = 0$ и $a_{1\bar{1}} \neq 0$.

В [3] показано, что если выполняется условие $\mathbf{3}^0$, то функция $y(x,\lambda) := \exp(\lambda\omega_1 x)$ является порождающей для системы собственных функций (с.ф.) пучка $L(\lambda)$ при $\lambda \neq 0$. Если же выполняется условие $\mathbf{4}^0$, то порождающей функцией является функция $y(x,\lambda) := \exp(\lambda\omega_1 x) + b_0 \exp(\lambda(\omega_1 + \omega_2 x))$, где $b_0 = a_{1\bar{1}}/a_{\bar{1}\bar{2}} \neq 0$.

Обозначим $Y_\Lambda := \{y(x,\lambda) : \ \lambda \in \Lambda\}$. Если $\lambda = 0 \notin \Lambda$, то система Y_Λ совпадает с системой с.ф. пучка $L(\lambda)$, соответствующих ненулевым с.з. В случае выполнения условия $\mathbf{3}^0$ система Y_Λ совпадает с обычной тригонометрической системой в экспоненциальной форме, и вопрос о полноте системы с.ф. пучка $L(\lambda)$ в пространстве $L_2[0,1]$ в этом случае является тривиальным. В дальнейшем считаем, что выполняется условие $\mathbf{4}^0$.

В работе [3] было найдено значение параметра $\hat{\sigma} = \frac{1}{1+\tau}$, такое что система Y_Λ 2-кратно полна в пространстве $L_2[0,\sigma]$ при $\sigma = \hat{\sigma}$ и 2-кратно неполна с бесконечным дефектом при $\sigma > \hat{\sigma}$. Кроме того, были найдены условия, при которых имеет место 1-кратная полнота системы Y_Λ в пространстве $L_2[0,\sigma]$.

В данной статье решается задача нахождения условий на параметры пучка $L(\lambda)$, при которых системы Y_Λ 1-кратно неполна, минимальна и образует базис безусловной сходимости в пространстве $L_2[0,\sigma]$. Отметим, что в случае $0 < \omega_1 < \omega_2$ и при условиях $a_{1\bar{2}} \neq 0$, $a_{\bar{1}2} \neq 0$, $a_{\bar{1}\bar{2}} = a_{12} = 0$ свойства с.ф. (1-кратная полнота и неполнота, минимальность, базисность Рисса) детально исследовались в [4], а при условии $\mathbf{2}^0$ – в [5].

Справедливы следующие результаты.

Теорема 1. *Если выполняются условия $\mathbf{1}^0$, $\mathbf{2}^0$, $\mathbf{4}^0$, то для того чтобы система Y_Λ была 1-кратно неполна в $L_2[0,\sigma]$ и имела там бесконечный дефект, достаточно выполнения:*

а) в случае $\sigma > \frac{1}{2}$, $\tau = 1$ – условия $b_0 = \pm 1$;

б) в случае $\sigma > \frac{m+1}{\tau}$ и $\tau > m+1$ при $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ – условия

$$\tau < |b_0|^2 \max\{1, |c_0|^{2m}\}; \tag{1}$$

в) в случае $\sigma > 1$ и $m < \tau < m+1$ при $m = 1$ и $m \le \tau < m+1$ при $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ – условия

$$|b_0|^2 \sum_{s=0}^{m} \frac{1}{|c_0|^{2s}} < \tau. \tag{2}$$

Теорема 2. *Если выполняются условия $\mathbf{1}^0$, $\mathbf{2}^0$, $\mathbf{4}^0$, то для 1-кратной минимальности системы Y в $L_2[0,\sigma]$ достаточно выполнения:*

а) в случае $\sigma \ge \tilde{\sigma} := 1$, $\tau = 1$ – условия $b_0 \neq \pm 1$; функции биортогональной системы $Z = \{z_n(x) : \ n \in \mathbb{Z}\}$ определяются при $\sigma = \tilde{\sigma}$ однозначно;

б) в случае $\sigma \ge \sigma_0 := \frac{1}{\tau}$, $\tau > 1$ – условия $\tau < |b_0|^2$; функции биортогональной системы Z определяются при $\sigma = \sigma_0$ однозначно;

в) в случае $\sigma \geq \frac{m+1}{\tau}$, $\tau > m+1$ — условия (1); функции биортогональной системы $Z = \{z_n(x): \ n \in \mathbb{Z}\}$ определяются неоднозначно;

г) в случае $\sigma \geq \tilde{\sigma}$, $m < \tau \leq m+1$ при некотором $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $\tau \neq 1$ — условия (2); функции биортогональной системы Z определяются при $\sigma = \tilde{\sigma}$ однозначно.

Теорема 3. *Если выполняются условия $\mathbf{1}^0$, $\mathbf{2}^0$, $\mathbf{4}^0$, то для 1-кратной безусловной базисности системы Y_Λ в $L_2[0,\sigma]$ достаточно выполнения:*

а) в случае $\sigma = \frac{1}{\tau}$ и $\tau > 1$ — условия $\tau < |b_0|^2$;

б) в случае $\sigma = 1$, $\tau = 1$ — условия $b_0 \neq \pm 1$;

в) в случае $\sigma = 1$ и $m < \tau \leq m+1$, $\tau \neq 1$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ — условия (2).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-00003) и гранта Президента РФ (проект НШ-2970.2008.1).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 528 с.

2. *Шкаликов А.А.* Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Тр. семинара им. И.Г. Петровского. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983. № 9. С. 190-229.

3. *Рыхлов В.С.* О полноте собственных функций дифференциального пучка второго порядка, корни характеристического уравнения которого лежат на одной прямой // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та. 2007. Вып. 9. С. 88-91.

4. *Рыхлов В.С.* О полноте собственных функций квадратичных пучков обыкновенных дифференциальных операторов // Изв. вузов. Сер. Математика. 1992. Т. 36. № 3. С. 35-44.

5. *Рыхлов В.С.* О свойствах собственных функций обыкновенного дифференциального квадратичного пучка второго порядка // Интегральные преобразования и специальные функции. Информационный бюллетень. М.: Науч.-исслед. гр. междунар. журн. "Integral Transforms and Special Functions"и ВЦ РАН. 2001. Т. 2. № 1. С. 85-103.

УДК 517.927.25

В.С. Рыхлов, О.В. Шигаева

ТЕОРЕМА О КРАТНОЙ НЕПОЛНОТЕ КОМБИНАЦИИ ЭКСПОНЕНТ С ПОКАЗАТЕЛЯМИ, ЛЕЖАЩИМИ НА ОДНОЙ ПРЯМОЙ, И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ К ПУЧКАМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Рассмотрим в пространстве $L_2[0,1]$ пучок операторов $L(\lambda)$, порожденный однородным дифференциальным выражением

$$l(y,\lambda) = y^{(n)}(x) + \lambda p_1 y^{(n-1)}(x) + \cdots + \lambda^n p_n y(x)$$

и двухточечными линейно независимыми краевыми условиями

$$\sum_{s+k \leq n-1} \lambda^s \left(\alpha_{jsk} y^{(k)}(0) + \beta_{jsk} y^{(k)}(1)\right) = 0, \quad j = \overline{1,n},$$