Заключение. В работе продолжены исследования, начатые в [1], предложен алгоритм нахождения начальных условий интегрирования сопряжённых дифференциальных уравнений краевой задачи переориентации круговой орбиты КА. Выявлены основные трудности численного решения задачи: периодичность по "времени"φ_1, неоднозначность нахождения начальных условий. Эти проблемы требуют дальнейшего изучения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №08-01-00 310).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Челноков Ю. Н.* Оптимальная переориентация орбиты космического аппарата посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2006. Вып. 8. С. 231-234.

УДК 533.6.011

Я.Г. Сапунков

ВТОРОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О СХОДЯЩЕЙСЯ УДАРНОЙ ВОЛНЕ

В статье получено аналитическое решение задачи о сходящейся ударной волне во втором приближении в области между поверхностью ударной волны и предельной характеристикой. Приводятся значения показателей автомодельности в зависимости от отношения теплоемкостей, полученных на основе полных уравнений и первых двух приближенных решений.

1. В работе [1] показано, что уравнения движения идеального совершенного газа в задаче о сходящейся ударной волне в безразмерных автомодельных переменных могут быть приведены к виду

$$\frac{dV}{d\ln\lambda} = -\left[(\nu+1)\,V - \frac{2}{\gamma}\,(1-\alpha)\right] + (V-\alpha)\,\frac{\Delta_4}{\Delta_0},$$
$$\frac{d\ln R}{d\ln\lambda} = -\frac{2\,(1-\alpha)}{\gamma\,(V-\alpha)} - \frac{\Delta_4}{\Delta_0}, \tag{1}$$
$$\frac{dZ}{d\ln\lambda} = -Z\left\{\frac{2}{V-\alpha}\left[V - \frac{1+\alpha\,(\gamma-1)}{\gamma}\right] + (\gamma-1)\,\frac{\Delta_4}{\Delta_0}\right\},$$

где $\Delta_4\,(V) = \nu V^2 - \left[(\nu+1)\,\alpha + \frac{2}{\gamma}\,(1-\alpha) - 1\right]V + 2\frac{\alpha}{\gamma}\,(1-\alpha)$, $\Delta_0 = (V-\alpha)^2 - Z$. Здесь γ — отношение теплоемкостей, α — показатель автомодельности в законе движения ударной волны, $\nu = 1$ соответствует цилиндрической симметрии, $\nu = 2$ — сферической симметрии. Размерные переменные связаны с автомодельными переменными соотношениями

$$\lambda = \frac{r}{A\,(-t)^{\alpha}},\ v = \frac{r}{t}V,\ \rho = \rho_0 R,\ p = \frac{\rho_0}{\gamma}\frac{r^2}{t^2}ZR.$$

Закон движения сходящейся ударной волны $r = r_s(t) = A(-t)^{\alpha}, t < 0$. Начальная плотность газа $\rho_0 = \mathrm{const}$. Граничные условия для автомодельных переменных на поверхности ударной волны

$$V(1) = V_s = \frac{2\alpha}{\gamma+1},\ R(1) = R_s = \frac{\gamma+1}{\gamma-1},\ Z(1) = Z_s = \frac{2\alpha^2\gamma(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2}. \qquad (2)$$

2. Для упрощения системы (1) отношение Δ_4/Δ_0 в первом приближении в [1] полагалось постоянной величиной, во втором приближении положим линейной функцией V в окрестности точки S, соответствующей на плоскости OVZ ударной волне, т. е.:

$$\frac{\Delta_4}{\Delta_0} = K + a(V - V_s),\ K = -\frac{2}{\alpha(\gamma-1)}\left[\left(2 - \frac{1}{\gamma}\right)(1-\alpha) - \nu\alpha\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right],$$

$$a = \frac{1}{\Delta_{0s}}\left\{2\nu V - \left[(\nu+1)\alpha + \frac{2}{\gamma}(1-\alpha)\right] - K\left[2(V-\alpha) - \frac{\Delta_3}{\Delta_1}\right]\right\}_s.$$

Решение упрощенных уравнений, с учетом условий (2) имеет вид

$$V = c_1 + c_2 tg\left(\mathrm{arctg}\frac{V_s - c_1}{c_2} + c_2 a \ln\lambda\right),$$

$$R = R_s\left[\frac{(V-c_1)^2 + c_2^2}{(V_s-c_1)^2 + c_2^2}\right]^{0.5M_1}\left(\frac{V-\alpha}{V_s-\alpha}\right)^{N_0}$$

$$\exp\left(\frac{1}{c_2}(M_0 + M_1 c_1)\,\mathrm{arctg}\frac{c_2(V-V_s)}{c_2^2 + (V-c_1)(V_s-c_1)}\right),$$

$$Z = Z_s\left[\frac{(V-c_1)^2 + c_2^2}{(V_s-c_1)^2 + c_2^2}\right]^{0.5D_1}\left(\frac{V-\alpha}{V_s-\alpha}\right)^{E_0}$$

$$\exp\left(\frac{1}{c_2}(D_0 + D_1 c_1)\,\mathrm{arctg}\frac{c_2(V-V_s)}{c_2^2 + (V-c_1)(V_s-c_1)}\right),$$

$$c_1 = \frac{1}{2a}[\nu + 1 + a(V_s + \alpha) - K], c_2 = \sqrt{\frac{1}{a}\left[\frac{2}{\gamma}(1-\alpha) - \alpha(K - aV_s)\right] - c_1^2},$$

$$N_0 = -\frac{2(1-\alpha)}{a\gamma\left[(\alpha-c_1)^2 + c_2^2\right]},\ M_1 = -1 - N_0,$$

$$M_0 = \alpha M_1 + 2N_0 c_1 - \frac{K}{a} + (V_s + \alpha), E_0 = -N_0,$$

$$D_1 = \gamma + 1 - E_0,\ D_0 = \alpha D_1 + 2E_0 c_1 - \frac{1}{a}[2 + (\gamma-1)(K - a(V_s+\alpha))].$$

3. Координаты особой точки B, соответствующей предельной характеристике, в которой $\Delta_0 = 0$, $\Delta_4 = 0$, имеют вид

$$V_B = \frac{1}{2\nu}\left(\left(\nu + 1 - \frac{2}{\gamma}\right)\alpha + \frac{2}{\gamma} - 1 \pm \right.$$
$$\left. \pm \sqrt{\left[\left(\nu + 1 - \frac{2}{\gamma}\right)\alpha + \frac{2}{\gamma} - 1\right]^2 - 8\nu\frac{\alpha}{\gamma}\left(1 - \alpha\right)}\right), \quad (11)$$

$$Z_B = \left(V_B - \alpha\right)^2. \quad (3)$$

Для определения α вместе с соотношениями (3) служит уравнение

$$Z_B = Z_s\left[\frac{\left(V_B - c_1\right)^2 + c_2^2}{\left(V_s - c_1\right)^2 + c_2^2}\right]^{0.5D_1}\left(\frac{V_B - \alpha}{V_s - \alpha}\right)^{E_0} \times$$
$$\times \exp\left(\frac{1}{c_2}\left(D_0 + D_1 c_1\right)\operatorname{arctg}\frac{c_2\left(V_B - V_s\right)}{c_2^2 + \left(V_B - c_1\right)\left(V_s - c_1\right)}\right). \quad (4)$$

Уравнение (4) решается численно методом Ньютона. Начальное приближение значения показателя автомодельности α_0 определялось из условия, что корни уравнения $\Delta_4\left(V\right) = 0$ являются кратными. Расчеты для цилиндрической симметрии показывают, что для $\gamma = 1.4$ значение показателя автомодельности, полученного на основе полных уравнений, $\alpha = 0.835306$, на основе аналитического решения в первом приближении $\alpha = 0.835440$, во втором приближении $\alpha = 0.835321$. Для случая сферической симметрии расчеты показывают, что для $\gamma = 1.4$ значение показателя автомодельности, полученного на основе полных уравнений, $\alpha = 0.717146$, на основе аналитического решения в первом приближении $\alpha = 0.717423$, во втором приближении $\alpha = 0.717179$. Проводились расчеты для различных значений отношения теплоемкостей от $\gamma = 1.1$ до $\gamma = 1.8$. Расчеты показали, что приближенные значения показателей автомодельности обладают достаточной точностью. При этом с увеличением значения отношения теплоемкостей и в первом и во втором приближении точность определения показателя автомодельности возрастает. Начальное приближение для α в случае цилиндрической симметрии

$$\alpha_0 = \frac{2 - \gamma + \gamma\sqrt{2\gamma} + \gamma^2}{2\left(1 + \gamma^2\right)},$$

в случае сферической симметрии

$$\alpha_0 = \frac{4 + 4\gamma\sqrt{2\gamma} + 3\gamma^2}{4 + 4\gamma + 9\gamma^2}.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Сапунков Я.Г.* Приближенное аналитическое решение задачи о сходящейся ударной волне // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2007. Вып. 9. С. 145-147.

УДК 629.78

Я.Г. Сапунков, А.В. Молоденков, А.Н. Державина

ОПТИМАЛЬНЫЙ ВЫВОД ТВЕРДОГО ТЕЛА С ОДНОЙ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ НА ПРОГРАММНОЕ ДВИЖЕНИЕ С УЧЕТОМ СОПРОТИВЛЕНИЯ СРЕДЫ

Решение задачи оптимального управления о выводе твердого тела с одной неподвижной точкой на программное движение с учетом момента сопротивления принципом максимума Понтрягина сводится к решению краевой задачи, которая решается методом Ньютона. Приводятся результаты численного решения задачи с учетом и без учета сопротивления среды.

1. Вращательное движение твердого тела с одной неподвижной точкой под действием управляющего момента $\mathbf{M}$ и момента сил сопротивления $-(\beta_1+\beta_2|\omega|)\,\omega$, $(\beta_i = \mathrm{const} \geq 0,\ i = 1,\,2)$ описывается системой уравнений [1]:

$$\frac{d\boldsymbol{\Lambda}}{dt}=\frac{1}{2}L\left(\boldsymbol{\Lambda}\right)\omega\ \ ,\qquad \frac{d\omega}{dt}=R_0\mathbf{M}-R_1\left(\omega\right)\omega \tag{1}$$

где t — время; $\boldsymbol{\Lambda} = (\Lambda_0,\,\Lambda_1,\,\Lambda_2,\,\Lambda_3)$ — кватернион положения тела; $\omega = (\omega_1,\,\omega_2,\,\omega_3)$ — вектор угловой скорости и его проекции на оси подвижной системы координат, оси которой совпадают с главными осями инерции для неподвижной точки тела; A, B, C — главные моменты инерции, $L\left(\Lambda\right)$, R_0 , $R_1\left(\omega\right)$ — матрицы, определенные в [1]. На управляющий момент наложено ограничение

$$|\mathbf{M}| \leq M_*. \tag{2}$$

Вращательное программное движение тела описывается кватернионным соотношением $\Lambda = \Lambda_{\mathrm{pr}}(t)$, $0 \leq t < \infty$. Вектор угловой скорости программного движения $\omega_{\mathrm{pr}}(t)$ связан с $\Lambda_{\mathrm{pr}}(t)$ уравнением

$$\frac{d\boldsymbol{\Lambda}_{pr}}{dt}=\frac{1}{2}L\left(\boldsymbol{\Lambda}_{pr}\right)\omega_{pr}\left(t\right).$$

Начальные условия для управляемого тела при t=0

$$\boldsymbol{\Lambda}=\boldsymbol{\Lambda}_N,\ \omega=\omega_N. \tag{3}$$

Условие вывода управляемого тела на программное движение при $t = t_T$=?

$$vect\left(\boldsymbol{\Lambda}\left(t_T\right)\circ\tilde{\boldsymbol{\Lambda}}_{pr}\right)=0,\ \omega=\omega_{pr}\ . \tag{4}$$