α	W_1E/q_0, м	$W_{[4]}E/q_0$, м	W_2E/q_0, м	W_3E/q_0, м
1°	$1.381 \cdot 10^5$	-	$1.411 \cdot 10^7$	$2.783 \cdot 10^6$
15°	$1.226 \cdot 10^5$	$1.224 \cdot 10^5$	$1.450 \cdot 10^7$	$2.418 \cdot 10^6$
30°	$0.840 \cdot 10^5$	$0.8405 \cdot 10^5$	$1.348 \cdot 10^7$	$1.622 \cdot 10^6$

Сравнивая приведнные значения, можно заметить хорошее совпадение результатов расчета для первого случая со значениями, приведенными в [4].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Григоренко Я.М., Крюков Н.Н.* Решение задач теории пластин и оболочек с применением сплайн-функций (обзор) // Прикладная механика. 1995. Т. 31, вып 6. С. 3-27.
2. *Годунов С.К.* О численном решении краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // УМН. 1961. Т. XVI. Вып. 3 (99). С. 171-174.
3. *Виноградов Ю.И., Виноградов А.Ю., Гусев Ю.А.* Численный метод переноса краевых условий для жестких дифференциальных уравнений строительной механики. // Математическое моделирование. 2002. Т. 14, вып. 9. С. 3-8.
4. *Крюков Н.Н.* Расчет косоугольных и трапецоидальных пластин с помощью сплайн-функций // Прикладная механика. 1997. Т. 33, вып. 5. С. 77-81.
5. *Доннел Л.Г.* Балки, пластины и оболочки. Пер. с англ. / Под ред. Э.И. Григалюка. М.: Наука. 1982. 568 с.

УДК 533.6.011:632.529

Г.Д. Севостьянов

МЕТОД РАСЧЕТА ПАРАМЕТРОВ РЕГУЛЯРНОГО ОТРАЖЕНИЯ КОСОГО СКАЧКА ОТ СТЕНКИ

В статье предложен метод расчета параметров течения газа при регулярном отражении косого скачка от плоской стенки на основе уравнений Чаплыгина. Сравнение вычисленных параметров с экспериментальными удовлетворительно для числа Маха $(1 \div 3)$.

Уравнения Чаплыгина [1, §16, 17] для плоского безвихревого установившегося течения идеального газа

$$\varphi_\theta = -\psi_\sigma, \varphi_\sigma = K(\sigma)\psi_\theta \tag{1}$$

(где φ — потенциал скорости, ψ — функция тока, θ — угол наклона вектора скорости к оси x; K, σ — функции Чаплыгина) приводятся к нелинейной системе в дивергентной форме

$$k(u)u_\varphi = (L(u))_\varphi = v_\psi, v_\varphi = u_\psi, u = -c\sigma, v = c\theta, k(u) = -K(\sigma), \tag{2}$$

$$c = (\gamma + 1)\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\overline{\dfrac{3}{\gamma-1}}}, k(0) = 0, k^{'}(0) = 1,$$

где $\gamma > 1$ — отношение теплоемкостей для газа.

Из (2) на скачке уплотнения имеем условия ($[f] = f_+ - f_-$ - разрыв функции f на скачке) и уравнение ударной поляры

$$\left(\frac{d\varphi}{d\psi}\right)_c = -\frac{[v]}{[u]} = -\frac{[L]}{[v]}, \left(\frac{d\varphi}{d\psi}\right)_c^2 = \frac{[L]}{[u]}, [v]^2 = [L][u]. \tag{3}$$

Система Чаплыгина (1) в переменных v, u имеет вид

$$\varphi_v = \psi_u, \ \varphi_u = k(u)\psi_v. \tag{4}$$

Тогда вдоль скачка (индекс “+” для величин на задней стороне скачка)

$$\left(\frac{d\varphi}{du}\right)_c = k_+\psi_v + \left(\frac{dv}{du}\right)_c \psi_u = \pm\sqrt{\frac{[L]}{[u]}}\left\{\psi_u + \left(\frac{dv}{du}\right)_c \psi_v\right\}. \tag{5}$$

т.е. на ударной поляре имеем из (5) условие косой производной для ψ

$$a\psi_u + b\psi_v = 0. \tag{6}$$

Для криволинейного скачка в однородном потоке Л. Крокко (L. Crocco) в 1937 г. ввел понятие “ежевидной” поляры. Для наклона “иголки” на поляре в плоскости vu

$$\left(\frac{dv}{du}\right)_{\text{иг}} = -\frac{\psi_u}{\psi_v} = \frac{b}{a}.$$

Для плоской твердой стенки ($dv = 0$) $b = 0$, т.е. имеем точку Крокко Q поляры с условием

$$2b = \frac{[L]}{[u]} + 3k_+ = 0, u = u_Q < 0. \tag{7}$$

Функции u и L можно представить интегралами по $\tau = V^2 V_{\max}^{-2} < 1$:

$$\begin{aligned} &u = c\int_{\tau_*}^{\tau} \frac{(1-\tau)^\beta}{2\tau} d\tau, L = c\int_{\tau_*}^{\tau} \frac{-1 + (2\beta+1)\tau}{2\tau(1-\tau)^{\beta+1}} d\tau \geq 0, \\ &\tau_* = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} > 0, 0 < \tau < 1, \beta = \frac{1}{\gamma - 1} > 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Пусть в однородном сверхзвуковом потоке (число Маха $M_\infty > 1$) косой скачок AO под неизвестным углом падения ω достигает плоской стенки (оси x) в точке O и регулярно отражается от нее под неизвестным углом отражения ω' в виде косого скачка OB. Обозначим числа Маха в области AOB и за OB через $M_1 > 1$ и $M_Q < 1$. По величине τ_∞ надо определить τ_1 и τ_Q,

$\theta_1 < 0$, ω, ω' и интенсивности двух скачков $1 > \xi = \dfrac{p_\infty}{p_1}$, $1 < \xi' = \dfrac{p_Q}{p_1}$ (p_∞, p_1, p_Q - давления в трех областях). Из (7), (3), (8) имеем два уравнения для τ_1 и τ_Q, записав условия на скачках АО и ОВ:

$$\int_{\tau_Q}^{\tau_1} \frac{-1+(2\beta+1)\,\tau}{2\tau\,(1-\tau)^{\beta+1}}d\tau = 3\frac{1-(2\beta+1)\,\tau_Q}{(1-\tau_Q)^{2\beta+1}} \int_{\tau_Q}^{\tau_1} \frac{(1-\tau)^{\beta}}{2\tau}d\tau,$$

$$\theta_1^2 = \left(\frac{v_1}{c}\right)^2 = \int_{\tau_1}^{\tau_\infty} \frac{-1+(2\beta+1)\,\tau}{2\tau\,(1-\tau)^{\beta+1}}d\tau \int_{\tau_1}^{\tau_\infty} \frac{(1-\tau)^{\beta}}{2\tau}d\tau =$$

$$= 3\frac{1-(2\beta+1)\,\tau_Q}{(1-\tau_Q)^{2\beta+1}} \left\{ \int_{\tau_Q}^{\tau_1} \frac{(1-\tau)^{\beta}}{2\tau}d\tau \right\}^2.$$

Так как $\gamma = 1 + \dfrac{2}{m}$ (m — число степеней свободы молекулы газа без учета ее колебаний), то все интегралы вычисляются аналитически. Углы падения и отражения определяются по формулам ($h_{1\infty} = \sqrt{\dfrac{\tau_1}{\tau_\infty}}$, $h_{Q\infty} = \sqrt{\dfrac{\tau_Q}{\tau_\infty}}$)

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{1-h_{1\infty}\cos|\theta_1|}{h_{1\infty}\sin|\theta_1|}, \operatorname{tg}\omega' = \frac{h_{1\infty}\cos|\theta_1| - h_{Q\infty}}{h_{1\infty}\sin|\theta_1|}, \tag{9}$$

полученным из рисунка двух ударных размерных поляр на декартовой плоскости годографа скорости (см. [1]) (вершиной малая поляра лежит на большой и пересекает ее ось в точке Q).

Интенсивности косых скачков АО и ОВ найдем по формулам соотношений на косом скачке (см. [1])

$$\xi = \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1}M_\infty^2\sin^2\omega - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^{-1}, \xi' = \frac{2\gamma}{\gamma+1}M_1^2\sin^2(\omega'+|\theta_1|) - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}. \tag{10}$$

Связь τ и M определяется формулой, получаемой из интеграла Бернулли

$$(\gamma-1)\,M^2 = \frac{2\tau}{1-\tau}. \tag{11}$$

Для околозвукового случая ($M_\infty \geq 1$) формулы упрощаются и переходят непрерывно в формулы околозвуковой теории [2, 3]: $L(u) = u^2/2$, $u_Q = -u_1/7$, $v_Q = 0$, $k(u) = u$.

Результаты вычислений Е.А. Лунёва и автора (ξ) приведены в таблице для $\gamma = 7/5$.

M_∞	τ_∞	τ_1	τ_Q	$\omega,^\circ$	$\omega',^\circ$	ξ
1,02	1,172	0,170	0,166	79,8	84,15	0,991
1,20	0,223	0,199	0,161	60,64	71,48	0,901
1,50	0,310	0,244	0,152	49,29	60,69	0,745
2,00	0,444	0,307	0,138	41,92	48,61	0,522
2,50	0,555	0,356	0,116	39,27	39,30	0,363
3,00	0,642	0,395	0,098	38,65	31,13	0,255

Найденный зависимости $\omega'(\omega)$, $\omega(\xi)$ достаточно близки к полученным экспериментально ([4, рис. 8.6, *а*; 5, фиг. 15 на с. 461] во всем диапазоне чисел Маха ($1 < M_\infty \leq 3$).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. Ч. II. Изд. 4-е. М.: ГИФМЛ. 1963.

2. *Севостьянов Г.Д.* Регулярное отражение околозвукового скачка от стенки. // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во. Сарат. ун-та, 2001. Вып. 3. С. 181-184.

3. *Китанин В.А., Севостьянов Г.Д.* Расчет регулярного отражения околозвукового скачка от плоской стенки // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во. Сарат. ун-та, 2002. Вып. 4. С. 187-190.

4. *Баженова Т.В., Гвоздева Л.Т.* Нестационарные взаимодействия ударных волн. М.: Наука. 1977.

5. Основы газовой динамики / Под ред. Г. Эммонса. М.: Изд-во. иностр. лит. 1963.

УДК 533.6

И.А. Чернов

НОВЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ БЕЗ ГРАДИЕНТА ДАВЛЕНИЯ

В статье представлен ряд новых автомодельных решений. Они описываются нелинейными уравнениями второго порядка, в коэффициенты которых входит параметр — показатель автомодельности. Решения являются формальными, их физическая интерпретация в теории вязко-невязкого взаимодействия, в частности, при рассмотрении вопросов об отрыве и о смешении потоков не обсуждается.

1. Плоско-параллельный случай.

Уравнения движения и неразрывности для компонент вектора скорости (u,v) имеют вид (ν – коэффициент вязкости) [1]

$$uu_x + vu_y = \nu u_{yy}, \quad u_x + v_y = 0.$$

С учетом уравнения неразрывности компоненты скорости выражаются через автомодельный представитель $\Phi(\zeta)$ функции тока (далее $\zeta = y/x^n$)

$$u(x,y) = x^{1-2n}\Phi'(\zeta), \quad v(x,y) = -\left[(1-n)\Phi(\zeta) - n\zeta\Phi'(\zeta)\right]x^{-n}.$$