

Пример гидродинамической интерпретации решения (3) был дан в [2].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Лойцянский Л.Г. Ламинарный пограничный слой. М.: Физматгиз, 1962. 479 с.
2. Чернов И.Я. Автомодельное решение о круглой эжектирующей струе факельного типа // Математика. Механика. Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та. 2007. Вып. 9. С. 199-203.

УДК 517.984

Г.П. Шиндяпин, А.А. Матутин

О ЗАКОНАХ ПОДОБИЯ РЕФРАКЦИИ УДАРНЫХ ВОЛН В ГАЗОВЫХ И ГАЗОЖИДКОСТНЫХ СРЕДАХ

Для различных режимов нелинейной рефракции ударной волны (УВ) AR(BR)- RR — регулярной (рис.1, а); NR — нерегулярной (рис.1, в); RW — с отраженной УВ (рис.1, с) установлены основные параметры (параметры подобия), определяющие основные характеристики ($q^+ = (p_3 - p_0)/(p_1 - p_0)$, $q^- = (p_A - p_0)/(p_1 - p_0)$; p_A - в т. А на АВ и ударно-волновую структуру течения (β, ω, δ УВ-АВ).

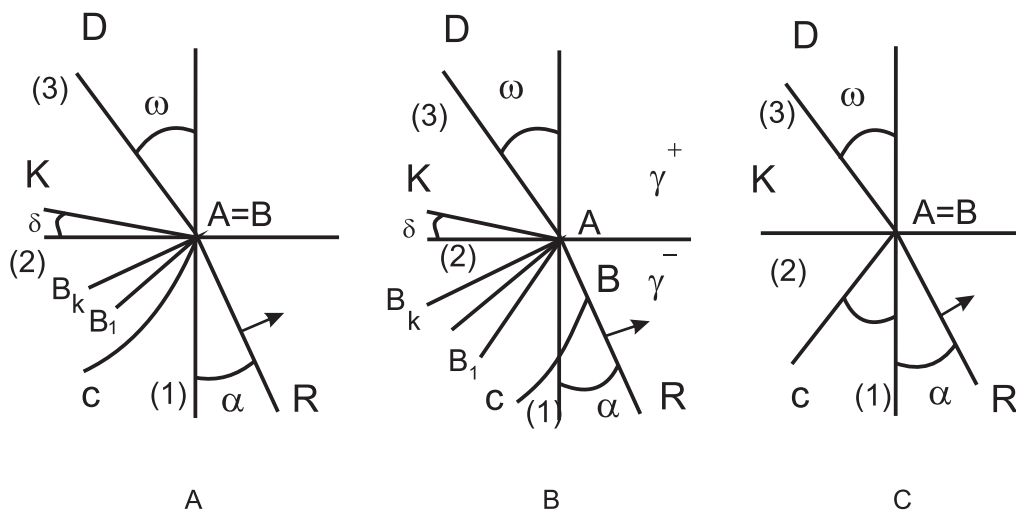


Рис. 1

При падении УВ AR(BR) относительной интенсивности $P_{10} = (p_1 - p_0)/B_0^-$, $B_0^- = \rho_0^- c_0^{-2}$ под углом α к вертикали на свободную поверхность АЕ, разделяющую различные газожидкостные среды (ГАЗ/ГЖС, ГАЗ/ГАЗ, ГЖС/ГЖС) с газосодержаниями γ^+, γ^- возникают различные режимы рефракции (рис.1), характеризующиеся фронтами УВ (AR — падающий, AD — преломленной, AC — отраженной, АВ — фронт Маха), волной разряжения B_1AB_K и изломом свободной поверхности АК. Параметр q^+ , характеризующий интенсивность волны разряжения или отраженной УВ, $p_3 = p_2$.

Анализ задач рефракции УВ при относительно малой интенсивности падающей УВ (AR, BR) ($\bar{\epsilon} \ll 1$, $\bar{\epsilon} = R_0(\gamma^-)P_{10} = L_0(\gamma^-)\epsilon_{10}$; $\epsilon_{10} = (p_1 - p_0)/p_0$), характерных для ГЖС пузырькового типа, как и для других случаев взаимодействия УВ, может быть проведен на трех различных уровнях точности: точных соотношений на фронтах УВ и решений для волны разряжения (модель Эйлера); адиабатических потенциальных течений (обобщенная на ГЖС модель Лайтхилла с точностью до P_{10}^2 включительно; асимптотической теории коротких волн (ТКВ) до P_{10} включительно) [1, 2].

1. Проведем анализ нелинейной рефракции RW с отраженной ударной волной на основе модели Эйлера, используя точные соотношения на фронтах УВ (AR, AC, AD) и свободной поверхности АК, разделяющей различные ГЖС с газосодержаниями γ^+ , γ^- (рис.1, с). Для элемента фронта УВ в автомодельных переменных $\xi = x/c_0t$, $\eta = y/c_0t$, описываемого уравнением $\xi = \xi(\eta)$, интенсивности $P_{ji} = (p_j - p_i)/B^\pm$, $B^\pm = \rho_0^\pm c_0^{\pm 2}$ (i — соответствует значениям перед фронтом, j — за фронтом) имеем (см. [1, 2]) условия динамической совместности:

$$\frac{\rho_i}{\rho_0} \frac{\left[(\xi - \eta\xi') - \left(\frac{u_i}{c_0} - \xi' \frac{v_i}{c_0} \right) \right]}{1 + \xi'^2} = N(P_{ji}); \quad \frac{\rho_i}{\rho_0} = \frac{N(P_{ji}) - P_{ji}}{N(P_{ji})},$$

$$P_{ji} = \frac{\rho_i}{\rho_0} \left[(\xi - \eta\xi') - \left(\frac{u_i}{c_0} - \xi' \frac{v_i}{c_0} \right) \right] \left(\frac{u_j}{c_0} - \frac{u_i}{c_0} \right), \quad (1)$$

$$\xi' \left(\frac{u_j}{c_0} - \frac{u_i}{c_0} \right) = \frac{v_i}{c_0} - \frac{v_j}{c_0}; \quad N(P_{ji}) = \frac{1 + 2a(d_1 + P_{ji})(d_2 + P_{ji})}{2(d_3 + aP_{ji})}.$$

Коэффициенты a , d_1 , d_2 , d_3 зависят от газосодержания сред γ^+ или γ^- (см. [1, 2]).

На фронте AR в точке A ($\eta_A = 0$) $\xi'_1 = \text{tg } \alpha$, $P_{ji} = P_{10}$ имеем

$$\xi_A^- = \frac{N^{1/2}(P_{10})}{\cos \alpha}; \quad \rho_1 = \rho_0^- \frac{N(P_{10})}{N(P_{10}) - P_{10}}; \quad u_1 = c_0^- \frac{P_{10}}{\xi_A^-}; \quad v_1 = c_0^- \text{tg } \alpha \quad u_1 \quad (2)$$

На фронте AC в т.А $\xi'_2 = \text{tg } \beta$, $P_{ji} = P_{21} = P_{20} - P_{10}$, $P_{20} = \frac{(p_2 - p_0)}{B_0^-}$

$$\text{tg } \beta = \frac{U_1 V_1 - (N(P_{21})\rho_0^-/\rho_0)^{1/2} (U_1^2 + V_1^2 - N(P_{21})\rho_0^-/\rho_1)^{1/2}}{V_1^2 - N(P_{21})\rho_0^-/\rho_1},$$

$$U_1 = \frac{u_1}{c_0^-} - \xi_A^-; \quad V_1 = \frac{v_1}{c_0^-} - \eta_A^-; \quad \eta_A^- = 0; \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{N(P_{21})}{N(P_{21}) - P_{21}}, \quad (3)$$

$$\frac{u_2}{c_0^-} = \frac{u_1}{c_0^-} + \frac{P_{21} \cos \beta (\rho_0^-/\rho_0)}{N^{1/2}(P_{21})}; \quad \frac{v_2}{c_0^-} = \frac{v_1}{c_0^-} + \frac{P_{21} \sin \beta (\rho_0^-/\rho_0)^{1/2}}{N^{1/2}(P_{21})}.$$

На фронте AD в точке A $\xi_3^{\pm} = -\operatorname{tg} \omega$, $P_{ji} = P_{30} = (p_3 - p_0)/B_0^+$, $B_0^+ = \rho_0^+ c_0^{+2}$

$$\xi_A^+ = \frac{N^{1/2}(P_{30})}{\cos \omega}; \quad \rho_3 = \rho_0^+ \frac{N(P_{30})}{N(P_{30}) - P_{30}}; \quad u_3 = c_0^+ \frac{P_{30}}{\xi_A^+}; \quad v_3 = \operatorname{tg} \omega u_3. \quad (4)$$

Условие совместности течений на свободной поверхности (в верхней и нижней областях) в точке A ($\eta_A^+ = \eta_A^- = 0$, $x_A/t = c_0 \xi$) приводит к I инварианту

$$c_0^+ \xi_A^+ = c_A^- \xi_A^-,$$

или

$$\frac{c_0^+ N^{1/2}(P_{30})}{\cos \omega} = \frac{c_0^- N^{1/2}(P_{30})}{\cos \alpha}. \quad (5)$$

Условия на свободной поверхности АК в т.А ($p_3 = p_2$, $u_{3n} = u_{2n} = u_n$) приводят (см. [1,2]) к записи ($\eta_A^{\pm} = 0$, $\xi_{KA}^{\pm} = -1/\operatorname{tg} \delta$)

$$\frac{v^{\pm} - c_0^{\pm} \eta_A^{\pm}}{u^{\pm} - c_0^{\pm} \xi_A^{\pm}} = \frac{1}{\xi_{KA}^{\pm}}, \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{v^{\pm}}{c_0^{\pm} \xi_A^{\pm}}. \quad (6)$$

Для относительно слабых УВ при $P_{10} \ll 1$, $|u^{\pm}| \ll C_0^{\pm} \xi_A^{\pm}$ условия (6) приводят ко II инварианту рефракции:

$$v^+ = v^-. \quad (7)$$

Инварианты I, II имеют место для всех режимов рефракции (RR, NR, RW). Однако для рефракции NR необходимо знать значения в точке A на фронте Маха AB (ξ_a^{\pm} , v_a^{\pm}), что связано с построением решения в области возмущения за фронтом AB (в приближении ТКВ [3]).

Инварианты I (5) и II (7) при подстановке $v^+ = v_3$, $v^- = v_2$ согласно (3), (4) приводит к записи двух уравнений относительно ω , q^+/P_{10} , α , γ^+ , γ^- . При этом для RR, NR, RW при $q^- = 1$ имеем $P_{30} = q^+ \bar{B} P_{10}$, $P_{21} = (q^+ - 1) P_{10}$, $\bar{B} = B^-/B^+$. Исключая ω из уравнений для инвариантов I, II, получим уравнение для нахождения q^+ , определяющей результирующую интенсивность рефракции (интенсивность преломленной УВ) $\bar{c} = c_0^-/c_0^+$:

$$\bar{c}^2 \frac{N(P_{30})}{P_{30}^2} \left[\frac{P_{10} \sin \alpha}{N^{1/2}(P_{10})} + \frac{P_{21} \sin \beta}{(\rho_1/\rho_0^-)^{1/2} N^{1/2}(P_{21})} \right]^2 = 1 - \frac{N(P_{30})}{\bar{c}^2 N(P_{10})} \cos^2 \alpha. \quad (8)$$

Здесь ρ_1/ρ_0^- , β определяются согласно (2), (3). В целом (8) представляет зависимость q^+/P_{10} , \bar{c} , \bar{B} , где P_{10} , α характеризуют интенсивность и наклон падающей УВ, а a , \bar{c} , \bar{B} — относительные характеристики газожидкостных сред, определяемые газосодержаниями γ^+ , γ^- . Эти характеристики являются параметрами подобия в задачах рефракции УВ.

2. При анализе нелинейной рефракции RR с волной разряжения B_1AB_K исследования проводятся аналогично п. 1. Однако вместо условий (3) на УВ АС берутся условия на центрированной волне разряжения B_1AB_K , описываемые на уровне модели потенциальных адиабатических течений (модели Лайтхилла с точностью до P_{10}^2) (см. [1, 2]) решением уравнения для потенциала скоростей:

$$\Phi(x, y, t) = c_0^2 t f(\xi, \eta), \quad c^* = c/c_0, \quad \frac{u}{c_0} = f_\xi, \quad \frac{v}{c_0} = f_\eta,$$

$$c^* (f_{\xi\xi} + f_{\eta\eta}) = (f_\xi - \xi)^2 f_{\xi\xi} + 2(f_\xi - \xi)(f_\eta - \eta) + (f_\eta - \eta)^2 f_{\eta\eta}, \quad (9)$$

$$c^{*2} = 1 + 2(1 - R_0(\gamma))G, \quad G = f - \xi f_\xi - \eta f_\eta + \frac{1}{2}(f_\xi^2 + f_\eta^2).$$

Решение (9) для центрированной волны разряжения ($\text{tg } Q = (\eta - \eta_A)/(\xi - \xi_A)$) имеет вид [1, 4]. Постоянные С, D для решения находятся из условий на переднем $Q = Q_1$ и заднем $Q = Q_K$ фронтах волны разряжения, что позволяет определить параметры u_2, v_2 за волной разряжения. Инварианты I, II (5), (7) также имеют место. Расчет параметров с помощью модели RR для случая ГАЗ/ГЖС приведен в [4].

3. Для анализа физической адекватности используемых математических моделей приведем сравнение результатов вычислений с помощью модели RR с волной разряжения (п. 2) с экспериментальными результатами [5] Abd-El-Fattah, Henderson. На рис. 2 приведено сравнение результатов расчета для случая ГАЗ/ГАЗ (CH_4/CO_2) по теории RR (п. 2) в соответствии с формулами (5), (7), (10) зависимости ω/α при $\epsilon_{10} = 0.28(\xi = 0.78)$, $\epsilon_{10} = 1/\xi - 1$. Для газов: $R_0(\gamma) = \frac{\kappa+1}{2}$, $L_0(\gamma) = \frac{\kappa+1}{2\kappa}$, $B_0 = p_0\kappa$,

$$\text{CO}_2 : \kappa = 1.3, \quad \rho_0^- = 1.976 \left(\frac{kg}{m^3} \right), \quad c_0^- = 256 \left(\frac{m}{c} \right);$$

$$\text{CH}_4 : \kappa = 1.28, \quad \rho_0^- = 0.717 \left(\frac{kg}{m^3} \right), \quad c_0^- = 423 \left(\frac{m}{c} \right).$$

$$\text{Параметры подобия: } \bar{\epsilon} = 0.25; \quad \bar{B} = 1.0; \quad \bar{L} = 1.0; \quad \bar{c} = 0.60.$$

Сравнение показывает, что теоретические результаты настоящих исследований достаточно хорошо согласуются с экспериментальными результатами во всем диапазоне изменения угла падения α при регулярном режиме рефракции RR с волной разряжения.

В работе [5] для случая ГАЗ/ГАЗ отмечается также существование режимов рефракции: NR, RW и других, характерных для рефракции при падении УВ со стороны более плотной среды, описываемых настоящей теорией.

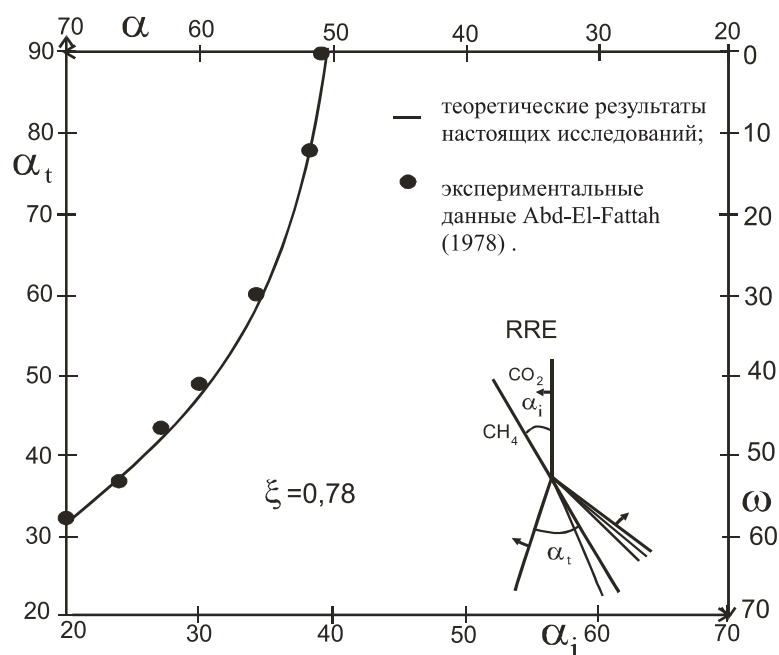


Рис. 2

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Шиндяпин Г.П. Нелинейные взаимодействия ударных волн в газах и газожидкостных средах. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1997. 104 с.
2. Шиндяпин Г.П., Ковалев А.Д. Математическое моделирование в задачах динамики многофазных сред. В 2 ч. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1990. Ч. II. 108 с.
3. Матутин А.А., Шиндяпин Г.П. Анализ нерегулярного режима рефракции ударной волны с образованием волны разрежения // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2007. Вып. 9. С. 139-142.
4. Маркушин А.Г., Шиндяпин Г.П. Рефракция ударной волны на свободной поверхности в газожидкостной среде с образованием волны разрежения // Аэродинамика: Межвуз. сб. научн. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1991. Вып. 12 (15). С. 24-39.
5. Abd-El-Fattah A.M., Henderson L.F. Shock waves at a slow-fast gas interface // J. Fluid Mech. 1978. V. 89, part 1. P. 79-95.

УДК 517.984

Г.П. Шиндяпин, А.А. Матутин

АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНОЙ РЕФРАКЦИИ УДАРНЫХ ВОЛН МЕТОДАМИ АССИМПТОТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ КОРОТКИХ ВОЛН

Проведем асимптотический анализ [1] процессов нелинейной рефракции (режимы RR, NR, RW [2]) относительно слабых ударных волн (УВ) ($\bar{\epsilon} \ll 1$; $\bar{\epsilon} = R_0(\gamma)P_{10}$, $P_{10} = (p_1 - p_0)/B_0$, $B_0 = \rho_0 C_0^2$). Получены аналитические выражения для основных характеристик ($q^+ = (p_3 - p_0)/(p_1 - p_0)$, $q^- = (p_A - p_0)/(p_1 - p_0)$, p_A - в точке А в режиме NR) в пространстве параметров подобия задач.