Следствие 2. *Предположим $n \geq 4$, выполняется условие (1) и функция $y(x, \lambda)$ в (3) определяется формулой (2). Тогда если коэффициенты $a_j \in \mathbb{C}$, $j = \overline{1, n}$ в (2) таковы, что выполняется условие (4), то система Y_Λ не является m-кратно полной $(3 \leq m \leq n-1)$ ни в каком пространстве $L_2[0, \sigma]$, где $\sigma > 0$, и имеет в каждом таком пространстве бесконечный дефект относительно m-кратной полноты.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-00003) и гранта Президента РФ (проект НШ-2970.2008.1).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Голубь А.В., Кутепов В.А., Рыхлов В.С.* Кратная неполнота собственных функций пучков дифференциальных операторов, корни характеристического уравнения которых лежат на одном луче // Саратов, 2004. 24 с. Деп. в ВИНИТИ 05.08.04, №1353-В2004.

2. *Рыхлов В.С.* О кратной неполноте собственных функций пучков дифференциальных операторов, корни характеристического уравнения которых лежат на одном луче // Докл. РАЕН. 2004. С. 72–79.

3. *Рыхлов В.С., Шигаева О.В.* Об n-кратной неполноте системы собственных функций одного класса пучков дифференциальных операторов// Современные проблемы теории функций и их приложения: Тез. докл. 14-й Сарат. зимней шк., посвящ. памяти акад. П.Л. Ульянова. Саратов, 28 янв. – 4 февр. 2008 г. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та. 2008. С. 162.

УДК 517.518.85

С.П. Сидоров

ТЕОРЕМА ТИПА КОРОВКИНА ДЛЯ КЛАССА ОПЕРАТОРОВ, ОБЛАДАЮЩИХ СВОЙСТВОМ ФОРМОСОХРАНЕНИЯ

Классическими результатами для класса положительных операторов являются результаты П.П. Коровкина. Им были найдены [1] условия сходимости последовательности линейных положительных операторов к тождественному оператору I в $C[0, 1]$

Теорема 1. *Пусть последовательность линейных операторов $L_i : C[0, 1] \to C[0, 1]$, $n \geq 1$, такова, что*

(1) $L_i(V_0) \subset V_0$, где $V_0 := \{f \in C[0, 1] \ : \ f \geq 0\}$;

(2) $\lim\limits_{i \to \infty} \|(L_i - I)e_j\| = 0$, $j = 0, 1, 2$.

Тогда для всех $f \in C[0, 1]$ будет

$$\lim_{i \to \infty} \|(L_i - I)f\| = 0.$$

Здесь $e_j(t) = t^j$, $j = 0, 1, \ldots$, $\| \cdot \|$ означает равномерную норму, $\|f\| = \sup\limits_{x \in [0,1]} |f(x)|$.

Пусть $u_k \in C^n[0,1]$, $k = 1, \ldots, n$, таковы, что система $u_1, \ldots, u_n$ есть обобщенная полная система Чебышева на $[0,1]$. Напомним, что функция f, определенная на [0,1], называется выпуклой по отношению к системе функций $u_1, \ldots, u_k$, если

$$\begin{vmatrix} u_0(t_0) & u_0(t_1) & \ldots & u_0(t_{k+1}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_k(t_0) & u_k(t_1) & \ldots & u_k(t_{k+1}) \\ f(t_0) & f(t_1) & \ldots & f(t_{k+1}) \end{vmatrix} \geq 0$$

для всех наборов $0 < t_0 < t_1 < \ldots < t_{k+1} < 1$, при этом пишут $f \in C(u_0, \ldots, u_k)$.

В частности, если $u_0 = e_0$, то $C(u_0)$ есть конус всех возрастающих функций на (0,1). Если $u_0 = e_0$, $u_1 = e_1$, то $C(u_0, u_1)$ есть конус всех выпуклых на (0,1) функций. Обзор некоторых результатов обобщенной теории выпуклости содержится в книге [2].

Пусть $\sigma = (\sigma_0, \ldots, \sigma_n) \in R^{n+1}$, $\sigma_i \in \{-1, 0, 1\}$, $\sigma_0\sigma_n \neq 0$. Обозначим $V_{k+1} := \{f \in C^k[0,1] \ : \ f \in C(u_0, \ldots, u_k)\}$, $k = 0, \ldots, n-1$, и рассмотрим конус

$$V_{0,n}(\sigma) = \cap_{k=0}^{n} \sigma_k V_k.$$

В настоящей статье показывается, что для последовательностей линейных операторов, обладающих свойством формосохранения, связанным с конусом $V_{0,n}(\sigma)$, справедлив результат, аналогичный теореме 1. А именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $\sigma_0\sigma_2 \neq -1$, $u_0 = e_0$, $u_1 = e_1$. Пусть последовательность линейных операторов $L_i : C^n[0,1] \to C^n[0,1]$, $i \geq 1$, такова, что*

(1) $L_i(V_{0,n}(\sigma)) \subset V_{0,n}(\sigma)$;

(2) $\lim\limits_{i\to\infty} \|(L_i - I)u_j\| = 0$, $j = 0, \ldots, n$.

Тогда для всех $f \in C^n[0,1]$ будет

$$\lim_{i\to\infty} \|(L_i - I)f\| = 0.$$

Утверждение теоремы 2 следует из [3, теорема 3] и следующей леммы.

Лемма. *Для всякого $z \in [0,1]$ существует $\varphi_z \in \mathrm{span}\{u_0, \ldots, u_n\}$ такая, что*

(1) $\varphi_z \in V_{0,n}(\sigma)$;

(2) $\varphi_z(z) = 0 < \varphi_z(x)$ для всех $x \in [0,1] \setminus \{z\}$;

(3) для любой $f \in C^n[0,1]$ найдется $\alpha = \alpha(f) \geq 0$ такое, что для всех $\beta > \alpha$ будет $\beta\varphi_z + f \in V_{0,n}(\sigma)$.

Доказательство. Без потери общности будем считать, что $\sigma_0 = 1$, а функции $u_1, \dots, u_n \in C^n[0,1]$ удовлетворяют начальным условиям $u_k^{(p)} = 0$, $p = 0, \dots, k-1$, $k = 1, \dots, n$. Система $u_1, \dots, u_n$ представима в виде (см. [2])

$$u_0(t) = \omega_0(t),$$

$$u_k(t) = \omega_0(t) \int_o^t \omega_1(\zeta_1) \int_0^{\zeta_1} \omega_2(\zeta_2) \dots \int_0^{\zeta_{k-1}} \omega_k(\zeta_k) d\zeta_k \dots d\zeta_1,\ k = 1, \dots, n,$$

где $\omega_0, \dots, \omega_{n-1}$ есть строго положительные на [0,1] функции, такие что $\omega_k \in C^{n-k}[0,1]$, $k = 0, \dots, n$.

Обозначим D_j, $j = 0, \dots, n$, дифференциальный оператор первого порядка

$$(D_j f)(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{f(t)}{\omega_j(t)}\right).$$

Справедливы соотношения

$$D_j \dots D_0 u_{j+1} = \omega_{j+1},\ j = 0, \dots, n-1, \tag{1}$$

$$D_j \dots D_0 u_j = 0,\ j = 0, \dots, n. \tag{2}$$

Возьмем $z \in [0,1]$ и определим функцию $\varphi_z \in \operatorname{span}\{u_0, \dots, u_n\}$,

$$\varphi_z = \sum_{k=0}^{n} \frac{D_{k-1} \dots D_0 \varphi_z(0)}{\omega_k(0)} u_k,$$

следующим образом:

1) $D_{n-1} \dots D_0 \varphi_z(0) = \sigma_n \omega_n(0) \|1/\omega_n\|$;

2) если $p = n-1, \dots, 2$, то полагаем $D_{p-1} \dots D_0 \varphi_z(0) = \sigma_p \omega_p(0) \|1/\omega_p\|(1+\beta_p)$, где

$$\beta_p = \left| \sum_{k=p}^{n} \frac{D_{k-1} \dots D_0 \varphi_z(0)}{\omega_k(0)} D_{p-1} \dots D_0 u_k \right|.$$

Тогда

$$\sigma_n D_{n-1} \dots D_0 \varphi_z = \omega_n \|1/\omega_n\| \geq 1.$$

Кроме того, для $p = n-1, \ldots, 2$ с учетом (1), (2) имеем

$$\sigma_p D_{p-1} \ldots D_0 \varphi_z = \sigma_p D_{p-1} \ldots D_0 \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{D_{k-1} \ldots D_0 \varphi_z(0)}{\omega_k(0)} u_k \right) =$$

$$= \sigma_p \sum_{k=0}^{n} \frac{D_{k-1} \ldots D_0 \varphi_z(0)}{\omega_k(0)} D_{p-1} \ldots D_0 u_k =$$

$$= \sigma_p \sum_{k=p}^{n} \frac{D_{k-1} \ldots D_0 \varphi_z(0)}{\omega_k(0)} D_{p-1} \ldots D_0 u_k =$$

$$= \sigma_p \Bigg(\frac{D_{p-1} \ldots D_0 \varphi_z(0)}{\omega_p(0)} D_{p-1} \ldots D_0 u_p +$$

$$+ \sum_{k=p+1}^{n} \frac{D_{k-1} \ldots D_0 \varphi_z(0)}{\omega_k(0)} D_{p-1} \ldots D_0 u_k \Bigg) =$$

$$= \omega_p \|1/\omega_p\| (1 + \beta_p) + \sigma_p \sum_{k=p+1}^{n} \frac{D_{k-1} \ldots D_0 \varphi_z(0)}{\omega_k(0)} D_{p-1} \ldots D_0 u_k \geq 1.$$

Таким образом,

$$\sigma_p D_{p-1} \ldots D_0 \varphi_z \geq 1, \; p = 2, \ldots, n.$$

Из [2, теорема 3.1, с. 392] следует, что

$$\varphi_z \in \sigma_p V_p, \; p = 2, \ldots, n.$$

Заметим, что так как $u_0 = e_0$, $u_1 = e_1$, то $D_1 = D_0 = D$, где D есть оператор дифференцирования первого порядка, $Df(t) = \frac{d}{dt} f(t)$. Поэтому $D(D\varphi_z) = D_1 D_0 \varphi_z \geq 1$ и φ_z строго выпукла на $[0,1]$. Доопределим φ_z так, чтобы $\varphi_z(z) = 0 < \varphi_z(x)$ для $x \in [0,1] \setminus \{z\}$. Для этого положим

$$\varphi_z(x) = \psi(x) - \psi(z) - D\varphi_z(z)(x - z)$$

на $[0,1]$, где $D\psi = D\varphi_z$. Лемма доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 07-01-00167-а) и гранта Президента РФ (проект НШ-2970.2008.1).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Коровкин П.П.* Сходимость линейных положительных операторов в пространстве непрерывных функций // Докл. АН СССР, Т. 90, 1953. с. 961-964

2. *Карлин С., Стадден В.* Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике. М.: Наука, 1976.

3. *Munoz-Delgado F.J., Ramirez-Gonzalez V., Cardenas-Morales D.* Qualitative Korovkin-type results on conservative approximation // J. Approx. Theory. 1998. V. 94. P. 144-159