УДК 517.518.82

Е.В. Сорина

УСЛОВИЯ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ВНЕШНЕЙ ОЦЕНКЕ СЕГМЕНТНОЙ ФУНКЦИИ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ПОЛОСОЙ

Рассматривается задача о построении полосы наименьшей постоянной ширины с полиномиальной осью, содержащей график заданной сегментной функции. Методами выпуклого анализа получены достаточные условия единственности решения задачи.

Пусть задана сегментная функция (с.ф.) $F(t) = [g_1(t), g_2(t)]$, $t \in [c; d]$, $g_1(t), g_2(t)$ – непрерывные функции, причём $g_1(t) \leq g_2(t)$, $P_n(A, t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$, $A = (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in R^{n+1}$ – вектор коэффициентов.

Рассмотрим экстремальную задачу

$$\rho(A) \equiv \max_{t\in[c,d]} \max \{P_n(A, t) - g_1(t), g_2(t) - P_n(A, t)\} \longrightarrow \min_{A\in R^{n+1}} . \qquad (1)$$

Это задача о внешней оценке с.ф. $F(t)$ полиномиальной полосой. Если A^* – решение задачи (1), то $P_n(A^*, t)$ является осью полиномиальной полосы наименьшей ширины, которая содержит график с.ф.

Очевидно, задача (1) является обобщением задачи П.Л. Чебышёва о равномерном приближении непрерывной функции полиномом (случай, когда $g_1(t) = g_2(t)$ при $t \in [c; d]$). В дискретном случае, когда отрезок $[c, d]$ заменяется конечной сеткой значений для t, задача рассматривалась И.Ю. Выгодчиковой [1].

Введём обозначения

$$R_1(A) = \{t \in [c; d] : \rho(A) = P_n(A, t) - g_1(t) > g_2(t) - P_n(A, t)\},$$

$$R_2(A) = \{t \in [c; d] : \rho(A) = g_2(t) - P_n(A, t) > P_n(A, t) - g_1(t)\},$$

$$R_3(A) = \{t \in [c; d] : \rho(A) = P_n(A, t) - g_1(t) = g_2(t) - P_n(A, t)\},$$

$$R(A) = R_3(A) \cup R_2(A) \cup R_3(A).$$

Отметим, что если $R_3(A) \neq \varnothing$, то, очевидно,

$$R_3(A) = \{\hat{t} \in [c; d] : g_2(\hat{t}) - g_1(\hat{t}) = \max_{t\in[c;d]}(g_2(t) - g_1(t))\}.$$

Ранее в работе [2] был получен критерий решения задачи (1):

Теорема 1. *Для того, чтобы вектор коэффициентов A^* был решением задачи (1), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось хотя бы одно из условий* *а)* $R_3(A^*) \neq \varnothing$*;*

б) существует упорядоченный набор точек $\{t_i\}_{i=\overline{1,n+2}}$, $c \le t_1 < t_2 < \ldots < t_{n+2} \le d$, *такой что если* $t_i \in R_1(A^*)(R_2(A^*))$, *то* $t_{i+1} \in R_2(A^*)(R_1(A^*))$.

В отличие от задачи П.Л. Чебышёва задача (1) может иметь не единственное решение. Приведём достаточные условия единственности.

Теорема 2. *Если вектор* A^* *удовлетворяет одному из условий*

1) множество $R_3(A^*)$ *содержит не менее* $(n+1)$ *точки,*

2) существует набор $T = \{t_i\}_{i=\overline{1,n+2}} \subset R(A^*)$*, в котором можно выделить упорядоченные точки* $t_{i_1} < t_{i_2} < \ldots < t_{i_l}$, $l \le n+2$*, из множества* $R_1(A^*) \cup R_2(A^*)$*, а остальные точки набора* T *содержатся в* $R_3(A^*)$*, и при этом если*

$$t_{i_k} \in R_1(A^*)(R_2(A^*)), \text{то } t_{i_{k+1}} \in \begin{cases} R_1(A^*)(R_2(A^*)), & i_{k+1} - i_k \text{ – чётн.}, \\ R_2(A^*)(R_1(A^*)), & i_{k+1} - i_k \text{ – нечётн.}, \end{cases}$$

то A^* *является, причём единственным, решением задачи (1).*

Доказательство. 1. Докажем, что A^* – решение задачи (1). Если выполнено условие 1) или условие 2) при $l < n+2$, то $R_3(A^*) \neq \varnothing$ и A^* - решение задачи (1) в соответствии с условием а) теоремы 1. Если же выполнено условие 2) и $R_3(A^*) = \varnothing$, то выполняется условие б) теоремы 1. Таким образом, в любом случае A^* - решение задачи (1).

2. Докажем единственность. Пусть $R_3(A^*) \neq \varnothing$ и A – ещё одно решение задачи (1). Тогда $R_3(A^*) = R_3(A)$ в силу определения множества $R_3(\cdot)$.

Если выполнено условие 1), то для точек $\{t_i\}_{i=\overline{1,n+1}} \subset R_3(A^*)$, как это следует из определения множества $R_3(A)$, будут выполняться равенства

$$P_n(A^*, t_i) = (g_1(t_i) + g_2(t_i))/2, i = \overline{1, n+1}, \tag{2}$$

которые представляют собой систему линейных алгебраических уравнений относительно $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$. Её определитель, являющийся определителем Вандермонда, отличен от нуля. Поэтому A^* – единственное решение системы (2), а следовательно, и задачи (1).

Пусть теперь выполняется только условие 2). Функция $\rho(A)$ является выпуклой и конечной на R^{n+1}. Её субдифференциал, пользуясь субдифференциальным исчислением [3], можно записать в виде

$$\partial\rho(A) = co\{\partial_A f(A,t) : t \in R(A)\}, \tag{3}$$

где $f(A,t) = \max\{P_n(A,t) - g_1(t), g_2(t) - P_n(A,t)\}$, а $\partial_A f(A,t)$ – субдифференциал функции $f(A,t)$ по A. Тогда в соответствии с субдифференциальным исчислением можно выразить его в виде

$$\partial_A f(A,t) = \begin{cases} (1,t,\dots,t^n), \ P_n(A,t) - g_1(t) > g_2(t) - P_n(A,t); \\ -(1,t,\dots,t^n), \ g_2(t) - P_n(A,t) > P_n(A,t) - g_1(t); \\ [-(1,t,\dots,t^n),(1,t,\dots,t^n)], \ P_n(A,t) = \frac{g_2(t)+g_1(t)}{2}. \end{cases} \tag{4}$$

Из (3) и (4) вытекает

$$\partial\rho(A)(\pi(A)) = co\{\xi(t)(1,t,\dots,t^n) : t \in R(A)\}, \tag{5}$$

где

$$\xi(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in R_1(A); \\ -1, & \text{если } t \in R_2(A); \\ [-1,1], & \text{если } t \in R_3(A). \end{cases} \tag{6}$$

Учитывая (5) и (6), а также само условие 2), нетрудно выбрать для A^* селектор $\eta(t) \in \xi(t)$ так, что если $\eta(t_i) = +1(-1)$, то $\eta(t_{i+1}) = -1(+1)$, $i = \overline{1, n+1}$. Тогда по теореме 2 из [4] выполняется

$$O_{n+1} \in int \quad co\{\eta(t_i)(1,t_i,\dots,t_i^n), i = \overline{1, n+2}\}.$$

Поэтому тем более $O_{n+1} \in int\ \rho(A^*)$, что, как известно из выпуклого анализа (см. [3]), говорит о том, что A^* – единственное решение задачи (1). Теорема доказана.

Приведём пример, показывающий существенность условий теоремы. Пусть $g_1(t) = 1,\ g_2(t) = t+2,\ t \in [0;1],\ n = 1$. Условие 1) теоремы 2 не выполняется, так как для оптимальных точек A множество $R_3(A) = \{1\}$ содержит лишь одну точку. Также не существует набора точек T, удовлетворяющего условию 2). Множество решений этой задачи можно записать в виде

$$\Omega = \{A^* = (a_0^*, a_1^*) : 0 \le a_1^* \le 1; a_0^* = 2 - a_1^*\}.$$

Оно содержит более чем одну точку.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Выгодчикова И.Ю.* О наилучшем приближении дискретного мультиотображения алгебраическим полиномом // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та. 2001. Вып. 3. С. 25-27.

2. *Дудов С.И., Сорина Е.В.* О приближении сегментной функции полиномиальной полосой // Современные проблемы теории функций и их приложения: Тез. докл. 14-й Сарат. зимней шк. Саратов, 28 янв. – 4 февр. 2008 г. Саратов, 2008. С. 67-68.

3. *Демьянов В.Ф., Васильев Л.В.* Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981. 384 с.

4. *Дудов С.И.* О двух вспомогательных фактах для исследования задач полиномиального приближения // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та. 2007. Вып. 9. С. 22-26.