3) Азот $\rho^+ = 1.251(kg/m^3),\ c^+ = 334(m/c),\ \bar{c} = 0.937,\ \bar{\rho}\bar{c} = 1.08$; Кислород $\rho^+ = 1.429(kg/m^3),\ c^+ = 313(m/c),\ \bar{c} = 1.161,\ \bar{\rho}\bar{c} = 1.000$.

В [4] построено решение (16) при $\bar{\rho}\bar{c} = 1$ для q^+ в пространстве параметров подобия c_γ, L, α^ν, отмечены характерные особенности поведения границ областей существования RR,NR,RW. В частности, граница между RW и RR, NR при $q^+ = 1.0, q^- = 1.0$ не зависит от α^ν и дается уравнением $2c_\gamma = 1/\bar{L} - 1$. Характерная точка на линии раздела $q^+ = 1.0$ есть $c_\gamma = 0, \bar{L} = 1$. Приведенные примеры газовых сред имеют значения $\bar{L}$ вблизи характерной точки.

Однако расчет параметров для всех режимов зависит от α^ν и все поверхности $\alpha^\nu = \mathrm{const}$ ($\alpha^\nu \geq 1$ RR, $\alpha^\nu \leq 1$ NR) проходят через линию раздела режимов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Шиндяпин Г.П., Ковалев А.В.* Математическое моделирование в задачах динамики многофазных сред: В 2 ч. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1990. Ч.2. 108 с.

2. *Шиндяпин Г.П., Матутин А.А.* О законах подобия рефракции ударных волн в газовых и газожидкостных средах // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2008. Вып. 10.

3. *Шиндяпин Г.П.* Об особенности "сверхзвукового"взаимодействия слабых ударных волн и задач преломления слабой ударной волны в воде на свободной поверхности // Аэродинамика: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1974. Вып. 3 (6). С. 24-36.

4. *Матутин А.А., Шиндяпин Г.П.* К теории нелинейной рефракции ударной волны // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2006. Вып. 8. С. 199-203.

УДК 539.3

О.А. Торопова

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ СТАТИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ ГЛУБОКОВОДНЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Потребность в новых источниках энергии привела к необходимости добычи нефти из новых нефтяных месторождений, расположенных под океанским дном. В связи с этим актуальной является задача определения равновесных конфигураций вертикальных нефтеподъемников (райзеров), соединенных нижним концом с помощью сферического шарнира с устьем буровой скважины. Будем считать, что райзер расположен в вертикальной плоскости одномерного потока подводных течений, возможно отклонение верхнего конца райзера на заданную величину в горизонтальном направлении $\overrightarrow{u}_s = u_{sx}\overrightarrow{i_1}$. В этом случае модель райзера будет иметь вид

$$\varepsilon\frac{dQ_1}{dt} = (1 - \gamma_1 T)(H_3 P_4 - \operatorname{tg}\varphi) - H_3 T/\cos\varphi + P_3(1 - \gamma_1 T/2);$$

$$\varepsilon\frac{dH_3}{dt} = -\frac{1+2\gamma_1 T}{\cos\varphi}Q_1;\ \frac{d\varphi}{dt} = \frac{H_3}{\cos\varphi};\ \frac{du_x}{dt} = \gamma_6 \operatorname{tg}\varphi; \tag{1}$$

$$u_x(0) = 0;\ H_3(0) = 0;\ u_x(1) = u_{sx};\ \ H_3(1) = 0. \tag{2}$$

Для глубоководных нефтеподъемников параметр ε, входящий в систему уравнений статического равновесия, имеет порядок $10^{-4} - 10^{-3}$, что дает возможность для построения решения использовать метод пограничных функций. В этом случае в системе (1) введем следующие обозначения:

$$F = ((1-\gamma_1 T)(H_3 P_4 - \operatorname{tg}\varphi) - H_3 T/\cos\varphi + P_3(1-\gamma_1 T/2), -(1+2\gamma_1 T)Q_1/\cos\varphi)^T;$$

$$f = (H_3/\cos\varphi, \gamma_6, \operatorname{tg}\varphi)^T;\quad z = (Q_1, H_3)^T;\quad y = (\varphi, u_x)^T.$$

Выражения для собственных чисел λ_1, λ_2 якобиана

$$\overline{F_z} = F_z(\overline{z}(t), \overline{y}(t)) = \begin{pmatrix} 0 & (1-\gamma_1 T_0){P_4}^0 - T^0/\cos\varphi_0 \\ -(1+2\gamma_1 T_0)/\cos\varphi_0 & 0 \end{pmatrix}$$

получим из характеристического уравнения $Det\{\partial F/\partial z - \lambda E\} = 0$:

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{((1+2\gamma_1 T_0)(1-\gamma_1 T_0){P^0}_4 \cos\varphi - T_0)/\cos\varphi_0)}. \tag{3}$$

Анализ формулы (3) показывает, что собственные числа являются вещественными и имеют разные знаки, поэтому рассматриваемую краевую задачу следует отнести к классу условно устойчивых краевых задач, решение которых, как известно, имеет два пограничных слоя в окрестностях граничных точек $t = 0$ и $t = 1$.

Получим главные члены асимптотического разложения. С этой целью рассмотрим вырожденную краевую задачу, т.е. случай, когда $\varepsilon = 0$:

$$\frac{d\varphi_0}{dt} = \frac{\varphi(1-\gamma_1 T) - {P_3}^0(1-0,5\gamma_1 T)}{(1-\gamma_1 T){P_4}^0 - T};$$

$$\frac{du_{x0}}{dt} = -\gamma_6\varphi_0;\quad u_{x0}(0) = 0;\quad u_{x0}(1) = -\gamma_6\varphi_0.$$

Она может быть решена, например, методом пристрелки. Ее решение позволяет построить члены регулярного ряда $\overline{y}_0 = (\varphi^0, {u_x}^0)^T$ и $\overline{z}_0 = (Q_{10}, H_{30})^T = (0,\ \frac{\varphi_0(1-\gamma_1 T) - {P_4}^0(1-\gamma_1 T/2)}{(1-\gamma_1 T){P_4}^0 - T})^T$.

Дифференциальные уравнения относительно погранслойных функций в окрестности нуля $\Pi_0 z = (\Pi_0 Q_1, \Pi_0 H_3)^T$ имеют вид

$$\frac{d\Pi_0 Q_1}{d\tau_0} = -a_1\Pi_0 H_3;\quad \frac{d\Pi_0 H_3}{d\tau_0} = -a_2\Pi_0 Q_1,$$

где $\tau_0 = t/\varepsilon$; $F_1(t) = T(t) - (1-\gamma_1 T(1))P_4(t)$; $F_2(t) = 1 + 2\gamma_1 T(t)$; $a_1 = F_1(0)$; $a_2 = F_2(0)$.

Решая эту систему, получим окончательно выражения для $\Pi_0 Q_1$ и $\Pi_0 H_3$:

$$\Pi_0 H_3(t) = -H_{30}(0)\exp(-\sqrt{a_1 a_2}t/\varepsilon),$$

$$\Pi_0 Q_1(t) = -\sqrt{a_1/a_2}H_{30}(0)\exp(-\sqrt{a_1 a_2}t/\varepsilon).$$

Аналогичные выражения имеют погранслойные функции в окрестности точки $t = 1$

$$Q_0 z = (Q_0 Q_1, Q_0 H_3); \quad Q_0 Q(t) = \sqrt{b_1/b_2}H_{30}(1)\exp(\sqrt{b_1 b_2}(t-1)/\varepsilon);$$

$$Q_0 H_3(t) = -H_{30}(1)\exp(-\sqrt{b_1 b_2}(t-1)/\varepsilon); \quad b_i = F_i(1)(i = 1, 2).$$

Таким образом, решение краевой задачи (1) в нулевом приближении имеет вид

$$\Pi_0 H_3(t) = -H_{30}(0)\exp(-\sqrt{a_1 a_2}t/\varepsilon);$$

$$\Pi_0 Q_1(t) = -\sqrt{a_1/a_2}H_{30}(0)\exp(-\sqrt{a_1 a_2}t/\varepsilon);$$

$$H_3(t) = H_{30}(t) - H_{30}(0)\exp(-\sqrt{a_1 a_2}t/\varepsilon) - H_{30}(1)\exp(\sqrt{b_1/b_2}(t-1)/\varepsilon);$$

$$Q_1(t) = -\sqrt{a_1/a_2}H_{30}(0)\exp(-\sqrt{a_1 a_2}t/\varepsilon) + \sqrt{b_1/b_2}{H_3}^0(1)\exp((b_1 b_2)(t-1)/\varepsilon);$$

$$\varphi(t) = \varphi^0(t); \quad u_x(t) = u_{x0}.$$

Дифференциальные уравнения относительно погранслойных функций в первом приближении в общем случае являются неоднородными (в отличие от аналогичных уравнений нулевого приближения):

$$\frac{d\Pi_1 Q_1}{d\tau_0} = -a_1 \Pi_1 H_3 - (1 - \gamma_1 T)\Pi_1 \varphi; \quad \frac{d\Pi_1 H_3}{d\tau_0} = -a_2 \Pi_1 Q_1.$$

Определяя константы интегрирования с помощью граничных условий (2), получим окончательно выражения для погранслойных функций в окрестности точки $t = 0$:

$$\Pi_1 H_3(t) = (\frac{a_5}{2}\sqrt{\frac{a_2}{a_1}}\frac{t}{\varepsilon} - H_{31}(0))\exp(-\sqrt{a_1 a_2}t/\varepsilon);$$

$$\Pi_1 Q_1(t) = (\frac{a_5}{2}\frac{t}{\varepsilon} - \sqrt{a_1/a_2}H_{31}(0) - \frac{a_5}{2\sqrt{a_1 a_2}})\exp(-\sqrt{a_1 a_2}t/\varepsilon),$$

где $a_5 = F_3(0)$; $F_3(t) = (1 - \gamma_1 T(t))H_{30}(t)\sqrt{a_1 a_2}$.

Аналогично могут быть получены выражения для погранслойных функций в окрестности точки $t = 1$.

Таким образом решение задачи будет иметь вид

$$H_3(t) = H_{30}(t) + \Pi_0 H_3(t) + Q_0 H_3(t) + \varepsilon(H_{31}(t) + \Pi_1 H_3(t) + Q_1 H_3(t)) + O(\varepsilon^2);$$

$$Q_1(t) = \Pi_0 Q_1(t) + Q_0 Q_1(t) + \varepsilon({Q^1}_1(t) + \Pi_1 Q_1(t) + Q_1 Q_1(t)) + O(\varepsilon^2);$$

$$u_x(t) = u_{x0}(t) + \varepsilon(u_{x1}(t) + \Pi_1 u_x(t) + Q_1 u_x(t)) + O(\varepsilon^2);$$

$$\varphi(1) = \varphi_0(t) + \varepsilon(\varphi_1(t) + \Pi_1 \varphi(t) + Q_1 \varphi(t)) + O(\varepsilon^2).$$

Поскольку в окрестности точки $t = 1$ нулевое и первое приближения практически совпадают, приведем таблицу их сравнения в окрестности нуля. Из таблицы видно, что в диапазоне изменения длин от 1000 до 2000 м значения таких статических характеристик райзера, как кривизна осевой линии райзера H_3, угол отклонения касательной к осевой линии райзера от вертикали φ, существенно уточняются. Для $l_0 \geq 2000$ м разница между нулевым и первым приближениями не превышает 2%, что позволяет упростить расчеты, используя только главные члены асимптотического разложения.

l_0 (м)	ε	${H_3}^*$		$\varphi(0)$	
		В нулевом приближении	В первом приближении	В нулевом приближении	В первом приближении
1000	0.0095	0.3399	0.3400	-0.1316	-0.1176
1500	0.0052	0.450064	0.450082	-0.1314	-0.1239
2000	0.0034	0.47729	0.487737	-0.1314	-0.1265
3000	0.0018	0.537563	0.537565	-0.1312	-0.1285
4000	0.0012	0.577410	0.577411	-0.1311	-0.1293
5000	0.00085	0.587633	0.587633	-0.1309	-0.1297
6000	0.00064	0.589008	0.589008	-0.1308	-0.1299
6500	0.00051	0.588739	0.588739	-0.1307	-0.12998

Данный подход может быть широко использован в задачах расчета характеристик установившегося движения глубоководных нефтеподъемников и длинномерных элементов морских геологоразведочных комплексов.