УДК 517.51

А.Ю. Трынин

СУЩЕСТВОВАНИЕ СИСТЕМ ЧЕБЫШЕВА С ОГРАНИЧЕННЫМИ КОНСТАНТАМИ ЛЕБЕГА ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

Справедлива следующая

Теорема. *Существует последовательность систем Чебышева непрерывно дифференцируемых на $[0,1]$ функций, для которой последовательность констант Лебега интерполяционного процесса по этой системе ограничена.*

Доказательство. Пусть $x_{k,n}=\frac{k}{n}, \quad k=\overline{0,n}, \quad n\in\mathbf{N}$, и последовательность положительных чисел d_n удовлетворяет соотношению

$$d_n=O(\frac{1}{\ln 2n}). \tag{1}$$

Положим

$$y(x,n)=\begin{cases}(-1)^k\sin(\frac{\pi n}{2d_n}(x-x_{k,n})),\ k=\overline{0,n},\\ \qquad\qquad \text{при } x\in[x_{k,n}-\frac{d_n}{n},x_{k,n}+\frac{d_n}{n}]\cap[0,1];\\ (-1)^k,\ k=\overline{0,n-1},\\ \qquad\qquad \text{при } x\in[x_{k,n}+\frac{d_n}{n},x_{k+1,n}-\frac{d_n}{n}].\end{cases} \tag{2}$$

Рассмотрим систему функций $\{l_{k,n}\}_{k=0}^n, \quad n\in\mathbf{N}$, где

$$l_{k,n}(x)=\frac{(-1)^k2d_ny(x,n)}{\pi n(x-x_{k,n})}, \quad k=0,1,2,\dots,n; \quad n\in\mathbf{N}.$$

Каждая функция $l_{k,n}, \quad k=0,1,2,\dots,n, \quad n\in\mathbf{N}$, непрерывно дифференцируема на $[0,1]$. На отрезке $[0,1]$ любой нетривиальный полином, составленный из $n+1$ функции этой системы,

$$\sum_{k=0}^n a_{k,n}l_{k,n}(x)=\sum_{k=0}^n a_{k,n}\frac{(-1)^k2d_ny(x,n)}{\pi n(x-x_{k,n})}=\frac{y(x,n)}{\omega_n(x)}P_n(x),$$

здесь

$$\omega_n(x)=\prod_{k=0}^n(x-x_{k,n}), \quad P_n(x)=\sum_{k=0}^n\Big\{\frac{(-1)^k2d_na_{k,n}}{\pi n}\prod_{i=0,i\neq k}^n(x-x_{i,n})\Big\},$$

имеет не более n нулей. Так как функция $\frac{y(x,n)}{\omega_n(x)}$ в силу (2) на отрезке $[0,1]$ нулей не имеет, а P_n – многочлен степени не выше n, то согласно определению системы Чебышева (см., например, [1, гл. 1, §2; 2, гл. 1, §4; 3, гл. 1, §1.3]), множество функций $\{l_{k,n}\}_{k=0}^{n}$ является системой Чебышева (Т-системой), и для произвольной функции f, определённой в $x_{k,n} = \frac{k}{n}$, $k = \overline{0,n}$, $n \in \mathbf{N}$, однозначно разрешима интерполяционная задача $\sum_{k=0}^{n} a_{k,n} l_{k,n}(x_{k,n}) = f(x_{k,n}), k = \overline{0,n}, n \in \mathbf{N}$. Рассмотрим интерполяционные операторы Лагранжа, построенные по функциям (2) и ставящие в соответствие любой определённой на отрезке $[0,\pi]$ функции f интерполирующую её в узлах $\{x_{k,n}\}_{k=0}^{n}$ функцию

$$L_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{y(x,n)}{y'(x_{k,n},n)(x-x_{k,n})} f(x_{k,n})$$

$$= y(x,n) \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k 2d_n}{\pi n(x-x_{k,n})} f(x_{k,n}) = \sum_{k=0}^{n} l_{k,n}(x) f(x_{k,n}). \quad (3)$$

Значит, в качестве коэффициентов интерполяционного полинома по системе Чебышева $l_{k,n}$ следует брать $a_{k,n} = f(x_{k,n})$.

Оценим сверху константы Лебега — нормы операторов L_n, действующих из $C[0,1]$ в $C[0,1]$.

$$L_n = \sup_{f:\|f\|_{C[0,1]}=1} \|L_n(f,\cdot)\|_{C[0,1]} = \max_{x\in[0,1]} \Big\{ |y(x,n)| \sum_{k=0}^{n} |\frac{(-1)^k 2d_n}{\pi n(x-x_{k,n})}| \Big\}.$$

Возьмём произвольное $x \in [0,1]$. Обозначим через k_0 номер ближайшего к x узла интерполирования $x_{k_0,n} = \frac{k_0}{n}$. Если таких узла два, то – номер левого. Тогда

$$L_n = \max_{x\in[0,1]} \Big\{ |y(x,n)| \sum_{k=0}^{k_0-1} |\frac{(-1)^k 2d_n}{\pi n(x-x_{k,n})}| + |y(x,n)||\frac{(-1)^k 2d_n}{\pi n(x-x_{k_0,n})}| +$$

$$+ |y(x,n)| \sum_{k=k_0+1}^{n} |\frac{(-1)^k 2d_n}{\pi n(x-x_{k,n})}| \Big\}. \quad (4)$$

Сначала с помощью формулы Лагранжа и (2) (заметим, что $\max_{x\in[0,1]} |y'(x,n)| = |y'(x_{k,n},n)|$) оценим

$$|y(x,n)||\frac{(-1)^k 2d_n}{\pi n(x-x_{k_0,n})}| = \frac{2d_n|y(x,n)-y(x_{k_0,n},n)|}{\pi n|x-x_{k_0,n}|} = \frac{|y'(\xi_{k_0,n},n)|}{|y'(x_{k_0,n},n)|} \le 1, \quad (5)$$

где $\xi_{k_0,n}$ лежит между x и $x_{k_0,n}$. Далее, сумму первого и третьего слагаемых в (4) оценим таким образом

$$\Big\{ |y(x,n)| \sum_{k=0}^{k_0-1} |\frac{(-1)^k 2d_n}{\pi n(x-x_{k,n})}| + |y(x,n)| \sum_{k=k_0+1}^{n} |\frac{(-1)^k 2d_n}{\pi n(x-x_{k,n})}| \Big\} \le$$

$$\le \frac{2d_n}{\pi n}4n\Big\{\int_0^{x-\frac{1}{4n}}\frac{dt}{x-t}+\int_{x+\frac{1}{4n}}^1\frac{dt}{t-x}\Big\}.$$

Учитывая, что $\max\limits_{x\in[0,1]}\ln x(1-x)=\ln\frac{1}{4}$, получаем, что для любого натурального n и произвольного $x\in[0,1]$

$$\Big\{|y(x,n)|\sum_{k=0}^{k_0-1}|\frac{(-1)^k 2d_n}{\pi n(x-x_{k,n})}|+|y(x,n)|\sum_{k=k_0+1}^{n}|\frac{(-1)^k 2d_n}{\pi n(x-x_{k,n})}|\Big\}\le\frac{16d_n}{\pi}\ln 2n.$$

Отсюда, из (4) и (5) следует

$$L_n\le 1+\frac{16d_n}{\pi}\ln 2n.$$

Учитывая выбор последовательности d_n в (1), получаем утверждение теоремы.

Замечание 1. Рассматриваемая система $\{l_{k,n}\}_{k=0}^{n}$, $n\in\mathbf{N}$, — не полная система Чебышева [2, гл.1, §1), т.е. система $\{l_{k,n}\}_{k=0}^{r}$, $n\in\mathbf{N}, r<n$ не является Т-системой.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 07-01-00167) и гранта Президента РФ (проект НШ-2970.2008.1).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Даугавет И.К.* Введение в теорию приближения функций. Ленинград: Изд-во Ленинградского университета, 1977.

2. *Карлин С., Стадден В.* Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике. М.: Наука, 1976.

3. *Привалов А.А.* Теория интерполирования функций. В 2-х кн. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1990.

УДК 517.51

Р.Н. Фадеев

О НЕКОТОРЫХ УСЛОВИЯХ АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ СИСТЕМАМ

Пусть $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{N}$ и $2\le p_n\le N$ для всех $n\in\mathbb{N}$, $m_0=1$, $m_n=p_1\dots p_n$ при $n\in\mathbb{N}$. Если $I_i^k=[i/m_k,(i+1)/m_k)$, $i,k\in\mathbb{Z}_+$, $i<m_k$, то I_i^k разбивается на p_{k+1} интервалов I_j^{k+1}, $p_{k+1}p_{k+2}$ интервалов I_j^{k+2} и т.д.

Для $x\in[0,1)$, записанного в виде $x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n/m_n$, $x_n\in\mathbb{Z}\cap[0,p_n)$ (для $x=i/m_k$ берется разложение с конечным числом $x_n\neq 0$), и $k\in\mathbb{Z}_+$, записанного в виде $k=\sum\limits_{j=1}^{\infty}k_j m_{j-1}$, $k_j\in\mathbb{Z}\cap[0,p_j)$, полагаем $\chi_k(x)=$