Поскольку $\hat{M}(\rho) = 0$, для каждого фиксированного $x \in [0,\pi]$ функции $P_{1j}(x,\rho)$, $j = 1,2$, являются целыми аналитическими по ρ, что вместе с (13) дает $P_{11}(x,\rho) \equiv \cos\hat{Q}(x)$, $P_{12}(x,\rho) \equiv 0$. Также имеем $\sin\hat{Q}(x) \equiv 0$. Следовательно, $\hat{Q}(x) \equiv \pi\alpha$, где $\alpha \in \mathbb{Z}$. В силу непрерывности $\hat{Q}(x)$ число α не зависит от x, и поэтому $\hat{Q}(x) \equiv 0$, то есть $q_1(x) \equiv \tilde{q}_1(x)$. Получаем $P_{11}(x,\rho) \equiv 1$. Согласно (11) получаем $S(x,\rho) = \tilde{S}(x,\rho)$, и следовательно, $q_0(x) = \tilde{q}_0(x)$ почти всюду на $[0,\pi]$. $\square$

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ (проекты МК-1701.2007.1 и НШ-2970.2008.1), РФФИ и ННС (проекты 07-01-00003, 07-01-92000-ННС-а).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Yurko V.* Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory. Inverse and Ill-posed Problems Series. Utrecht: VSP, 2002.

2. *Юрко В.А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007.

3. *Гасымов М.Г., Гусейнов Г.Ш.* Определение оператора диффузии по спектральным данным // ДАН Азерб. ССР. 1981. Т.37, №2. С.19–23.

4. *Юрко В.А.* Обратная задача для пучков дифференциальных операторов // Матем. сб. 2000. Т.191, №10. С.137–160.

5. *Buterin S.A.* On inverse spectral problem for non-selfadjoint Sturm – Liouville operator on a finite interval // J. Math. Anal. Appl. 2007. V.335. Issue 1. 739–749.

УДК 512.7

А.М. Водолазов

АЛГЕБРЫ ЦЕЛОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ТОРОВ МАЛОЙ РАЗМЕРНОСТИ

Пусть k – поле p-адических чисел, O – кольцо целых p-адических. T – алгебраический k-тор. В работах [1-3] рассматривается алгебра

$$A = \{f \in k[T] \mid f(U_k) \subset O\}\ ,$$

где U_k – максимальная компактная подгруппа группы $T(k)$. Эта алгебра представляет интерес при исследовании целых моделей алгебраических торов. Она имеет бесконечный набор образующих. В [1] был поставлен ряд вопросов об изучение свойств этой алгебры. В частности, вопрос о нахождении образующих для разложимых торов $T = G_m^n$. Образующие для разложимых торов были найдены в работе [4].

Дальнейшие изучение алгебры A можно проводить в двух направлениях. Во-первых, переходить к более сложным классам алгебраических торов, чем разложимые, т.е. изучать квазиразложимые, норменные и другие классы торов. Во-вторых, провести описание для торов малой размерности, т.е. одномерных, двухмерных и т.д.

В этой статье будут описаны образующие алгебры A для одномерных и двухмерных торов.

Имеется два одномерных тора $T = G_m$ и $T = R^{(1)}_{L/k}(G_m)$, где $L = k(\sqrt{d})$. Первый тор разложимый, и его образующие найдены в [4]. Рассмотрим второй тор, и пусть $(d,\ p) = 1$. Образующие алгебры A в этом случае сводятся к образующим алгебры

$$B = \{f \in k[x, y] \mid f(U) \subseteq O\},$$

$$\text{где} \quad U = \{(x, y) \in O^2 \mid x^2 - dy^2 = 1\}. \tag{1}$$

Подробнее рассмотрим множество U. Обозначим

$$U_1 = \{(\pm x_1, \pm y_1), \ldots, (\pm x_s, \pm y_s)\}$$

множество решений сравнения

$$x^2 - dy^2 \equiv 1\ (mod\ p). \tag{2}$$

Плюс и минус у x и y берутся всевозможными способами. Если пара (x_i, y_i) является решением сравнения (1), то для $y'_i = y_i + y_i^{(2)} p$ при любом $y_i^{(2)}$ из полной системы вычетов по модулю p существует единственное решение x'_i сравнения

$$(x'_i)^2 - d(y'_i)^2 \equiv 1\ (mod\ p^2) \tag{3}$$

удовлетворяющее сравнению $(x'_i) \equiv x_i\ (mod\ p)$. Это следует из леммы Гензеля для сравнения (2). Далее, применяя лемму Гензеля, можно строить по решениям сравнения по модулю p^n решения по модулю p^{n+1}, в пределе получая элемент множества U.

Пусть U_n — множество решений сравнения (2) по модулю p^n, тогда мощности этих множеств u_n связаны соотношением $u_{n+1} = pu_n$. Обозначим $T_1 = U_1$, $T_n = U_n / U_{n-1}$ при $n \leq 2$, $|T_1| = s$, $T_n = \tilde{\varphi}(n) = |U_n| - |U_{n-1}| = \varphi(p^{n-1})s$ (φ –функция Эйлера).

Теорема. *Пусть* $u_n < m \leq u_{n+1}$, *а*

$$G_m(x) = \frac{1}{p^{s_m}} \prod_{(x_i, y_i) \in U_n} (x - x_i) \prod_{(x_j, y_j) \in T_{n+1},\ u_n < j \leq m} (x - x_j)$$

и

$$H_m(y) = \frac{1}{p^{s_m}} \prod_{(x_i, y_i) \in U_n} (y - y_i) \prod_{(x_j, y_j) \in T_{n+1},\ u_n < j \leq m} (y - y_j),$$

если $m = m_n\tilde{\varphi}(n) + \cdots + m_1\tilde{\varphi}(1) + m_0$, *то* $s_m = m_n\alpha_n + \cdots + m_1\alpha_1$, *где* $0 \le m_i < p$, $\alpha_i = \frac{p^i-1}{p-1}$,*при* $0 < i \le k$ $m_k \ne 0$, $0 \le m_0 < s$, *тогда*

$$B = O[x, y, G_1(x), H_1(y), \ldots, G_n(x), H_n(y), \ldots] \ .$$

Доказательство. Для доказательства теоремы надо проверить, что многочлены $H_n(y)$ обладают следующими свойствами:

1) $\deg H_m = m$,

2) $H_m \in B$,

3) $\frac{H_m(y_{m+1})}{p} \notin B$.

Сначала рассмотрим многочлены H_m при $m = u_n$, т.е. многочлены

$$H_{u_n}(y) = \frac{1}{p^{\alpha_n}} \prod_{y_i \in U_n} (y - y_i) \ ,$$

где $\alpha_n = \frac{p^n-1}{p-1}$. Проверим свойства 1)-3) для этих многочленов.

Так как y является решением уравнения (1), а y_i пробегает множество решений соответствующего сравнения по модулю p^n, то имеет место следующие разложение:

$$y = b_0 + b_1p + \cdots + b_{n-1}p^{n-1} + b_np^n + \ldots \ (0 < b_0 \le p-1, \ 0 \le b_i \le p-1)$$

$$y_i = a_0 + a_1p + \cdots + a_{n-1}p^{n-1} \ (0 < a_0 \le p-1, \ 0 \le a_i \le p-1)$$

Разность $(y-y_i)$ делится точно на p^l, если $b_i = a_i$ при $i = 0, \ldots, l-1$, а $b_l \ne a_l$. При фиксированном y, когда y_i пробегает множество решений сравнения по модулю p^n, количество $(y - y_i)$ в $\prod\limits_{y_i \in U_n} (y - y_i)$, делящихся точно на p^l при $l < k$, равно $(p-1)p^{k-(l+1)}$, так как для этих y_i

$$a_0 = b_0, \ldots, a_{l-1} = b_{l-1},$$

а $a_l \ne b_l$ и a_j произвольные при $j \ge l+2$. Заметим, что, если $a_j = b_j$, $j = 0, \ldots, n-1$, то $(y - y_i)$ делится на p^n только для одного y_i из U_n и может делится на большую степень, если $b_k = \cdots = b_{k+m} = 0$. В результате $\prod\limits_{y_i \in U_n} (y - y_i)$ всегда делится на p^{α_n}, где

$$\alpha_n = n + (p-1)(n-1) + p(p-1)(n-2) + \cdots + (p-1)p^{n-(l+1)}l + \cdots + (p-1)p^{n-2}1 =$$

$$= 1 + p + \cdots + p^{n-1} = \frac{p^n-1}{p-1}.$$

Для y', у которого цифра b_n при p^n не равна нулю, $\prod\limits_{y_i \in U_n} (y' - y_i)$ не делится на p^{α_n+1}. Тем самым свойства 1)-3) для многочленов H_{u_n} доказаны.

Для произвольного H_n проверка свойств 1)-3) аналогична, надо только упорядочить элементы множества T_n.

Так же доказываются свойсва 1)-3) для многочленов $G_n(x)$. Из этого и следует утверждение теоремы.

Мы рассмотрели одномерные торы, разложимые и норменные для неразветвленных расширений. Существуют 9 различных неизоморфных двухмерных торов. Часть из них является прямыми произведениями разложимых и норменных одномерных торов, что сводит изучение таких торов к полученным нами результатам.

Библиографический список

1. *Kunyvskii B.E., Moroz B.Z., Voskresenskii V.E.* On integral models of an algebraic torus // Max - Planck - Institut fur Mathematic. Preprint Series 2001 (12).

2. *Воскресенский В.Е., Фомина Т.В.* Целые структуры в алгебраических торах// Изв. РАН: Сер. матем. 1995. Т. 59, №5. С. 3-18.

3. *Popov S.Yu., Voskresenskii V.E.* Galois lattices and reduction of algebraic tori.//Communications of Algebra. №9, 2001. P. 213-223.

4. *Водолазов А.М.* Целые модели разложимых алгебраических торов бесконечного типа // Современные проблемы алгебры, теории чисел и функционального анализа: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. гос. ун-та, Вып. 1. 2003. С. 14-23.

УДК 515.51

И.Ю. Выгодчикова

ОБ УСЛОВНОЙ ЗАДАЧЕ НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ СЕГМЕНТНОЙ ФУНКЦИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИМ ПОЛИНОМОМ

Рассматривается задача наилучшего равномерного приближения сегментной функции алгебраическим полиномом при наличии ограничения на значение полинома в одном узле сетки. Получен критерий оптимальности в форме, сравнимой с известным в теории приближений альтернансом П.Л. Чебышева.

Пусть n, N — целые числа, $n \geq 0$, $N \geq n+1$, $T = \{t_0 < t_1 < ... < t_N\}$, $A = (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $p_n(A,t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$. На сетке T задана сегментная функция $\Phi(\cdot)$, $\Phi(t_k) = [y_{1,k}; y_{2,k}]$, причем $y_{2,k} \geq y_{1,k}, k = \overline{0,N}$. Обозначим через $f_1(A,t_k) = p_n(A,t_k) - y_{1,k}$, $f_2(A,t_k) = y_{2,k} - p_n(A,t_k)$, $f(A,t_k) = \max\{f_1(A,t_k), f_2(A,t_k)\}$.

Рассмотрим следующую задачу:

$$\rho(A) := \max_{k=\overline{0,N}} f(A,t_k) \longrightarrow \min_{A \in D}, \tag{1}$$

$$D = \left\{A \in \mathbb{R}^{n+1} : p_n(A,t_s) \leq \nu\right\}, \tag{2}$$