Теорема 2. *Пусть функция* $u(x) \in C^1[0,1] : \max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} |u''(x)| \leqslant H$ *и* $u_\delta(x)$*:* $\|u_\delta - u\|_{L_p[0,1]} \leqslant \delta$ *, тогда имеет место двусторонняя оценка:*

$$\frac{1}{2}C_1\delta^{\frac{p}{2p+1}} \leqslant \left\|\widehat{T}^1_{\alpha(\delta)1}u_\delta - u'\right\|_{C[0,1]} \leqslant C_1\delta^{\frac{p}{2p+1}},$$

где $alpha(\delta) = C_2\delta^{\frac{p}{2p+1}}$, $C_2 = \left(\frac{(p+1)B}{2pH}\right)^{\frac{p}{2p+1}}$, $C_1 = (2HC_2 + B)$, $B = \frac{3}{2^{1/p}(q+1)^{1/q}}$, $q = \frac{p}{p-1}$.

Доказательство. Заметим, что

1) $\left\|\widehat{T}^1_{\alpha 1}\right\|_{L_p[0,1]\to C[0,1]} = \max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}\left(\int\limits_0^1 \left|\widehat{T}^1_{\alpha 1}(x,t)\right|^q dt\right)^{1/q} = B\alpha^{-1-1/p}$;

2) $\left\|\widehat{T}^1_{\alpha 1}u - u'\right\|_{C[0,1]} \leqslant \left\|\widehat{T}^0_{\alpha 1}u' - u'\right\|_{C[0,1]} \leqslant 2\alpha H$;

3) пусть $u_0(x) = \dfrac{Hx^2}{2}$, тогда $\left\|\widehat{T}^0_{\alpha 1}u' - u'\right\|_{C[0,1]} \geqslant \left|\widehat{T}^1_{\alpha 1}u_0 - u'_0\right|_{x=0} = H\alpha$.

Учитывая 1)-3) и используя метод, описанный в [4], получаем требуемую двустороннюю оценку.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Хромова Г.В.* О дифференцировании функций, заданных с погрешностью// Дифференциальные уравнения и вычислительная математика: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов. 1984. Вып. 6. С. 53-58.

2. *Сендов Бл.* Модифицированная функция Стеклова// ДБАН Comptes rendus de l'Acad*é*mie bulgare des Sciences. 1983. Т. 36, №3. С. 315-317.

3. *Шишкова Е.В.* Построение расширенных операторов, дающих приближение к функции и ее производным на отрезке// Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та. 2005. Вып. 3. С. 125-134.

4. *Хромова Г.В.* Об оценках погрешности приближенных решений уравнений первого рода// ДАН. 2001. Т. 378, №5. С. 605-609.

УДК 517.984

В.А. Юрко

ОБРАТНЫЕ УЗЛОВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ НА ДЕРЕВЕ

В статье исследуется обратная узловая задача для дифференциальных операторов Штурма – Лиувилля на звездообразном дереве со стандартными условиями склейки во внутренней вершине и условиями Дирихле в граничных вершинах. Обратная узловая задача заключается в восстановлении оператора по заданным узлам (нулям) собственных функций. Для данного класса операторов доказана теорема единственности и приведена конструктивная процедура решения обратной узловой задачи. Отметим, что эта задача тесно связана с обратными спектральными задачами (см. [1, 2] и литературу в них).

Рассмотрим компактный звездообразный граф T в $\mathbf{R^m}$ с множеством вершин $V = \{v_0, \ldots, v_r\}$ и множеством ребер $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_r\}$, где $v_1, \ldots, v_r$ – граничные вершины, v_0 – внутренняя вершина, и $e_i = [v_i, v_0]$, $i = \overline{1,r}$. Не нарушая общности считаем, что длина каждого ребра равна 1. Каждое ребро $e_i \in \mathcal{E}$ параметризуем параметром $x \in [0,1]$. Для нас удобно выбрать следующую ориентацию: $x = 0$ соответствует граничным вершинам $v_1, \ldots, v_r$, а $x = 1$ соответствует внутренней вершине v_0.

Интегрируемая функция Y на T может быть представлена в виде $Y(x) = \{y_i(x)\}_{i=\overline{1,r}}$, $x \in [0,1]$, где функция $y_i(x)$ определена на ребре e_i. Пусть $q(x) = \{q_i(x)\}_{i=\overline{1,r}}$ – интегрируемая вещественнозначная функция на T; q называется потенциалом. Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение на T:

$$-y_i''(x) + q_i(x)y_i(x) = \lambda y_i(x), \quad i = \overline{1,r}, \tag{1}$$

где λ – спектральный параметр, функции $y_i(x), y_i'(x)$, $i = \overline{1,r}$, абсолютно непрерывны на $[0,1]$ и удовлетворяют следующим условиям склейки во внутренней вершине v_0:

$$y_i(1) = y_j(1),\ i,j = \overline{1,r}, \quad \sum_{i=1}^{r} y_i'(1) = 0. \tag{2}$$

Условия склейки (2) называются стандартными или условиями Кирхгофа. В электрических сетях (2) выражает закон Кирхгофа, при колебаниях упругих сетей (2) выражает баланс напряжений и т.д.

Рассмотрим краевую задачу $B = B(q)$ на T для уравнения (1) с условиями склейки (2) и краевыми условиями Дирихле в граничных вершинах $v_1, \ldots, v_r$:

$$y_i(0) = 0, \quad i = \overline{1,r}. \tag{3}$$

Пусть $S_i(x,\lambda)$, $i = \overline{1,r}$, – решение уравнения (1) на ребре e_i с начальными условиями $S_i(0,\lambda) = 0$, $S_i'(0,\lambda) = 1$. При каждом фиксированном $x \in [0,1]$ функции $S_i^{(\nu)}(x,\lambda)$, $i = \overline{1,r}$, $\nu = 0,1$, являются целыми по λ порядка $1/2$. Кроме того, функция $S_i(x,\lambda)$ является единственным решением интегрального уравнения

$$S_i(x,\lambda) = \frac{\sin \rho x}{\rho} + \int_0^x \frac{\sin \rho(x-t)}{\rho} q_i(t) S_i(t,\lambda)\, dt, \tag{4}$$

где $\lambda = \rho^2$. Известно (см. [2]), что имеет место представление

$$S_i(x,\lambda) = \frac{\sin \rho x}{\rho} + \int_0^x K_i(x,t) \frac{\sin \rho t}{\rho}\, dt, \tag{5}$$

где $K_i(x,t)$ – гладкая функция, не зависящяя от λ. Используя (4) и (5), получаем асимптотические формулы для $S_i(x,\lambda)$ и $S_i'(x,\lambda)$ при $|\lambda|\to\infty$ равномерно по $x\in[0,1]$:

$$S_i(x,\lambda)=\frac{\sin\rho x}{\rho}-\frac{\cos\rho x}{2\rho^2}\int_0^x q_i(t)\,dt+ \\ +\frac{1}{2\rho^2}\int_0^x q_i(t)\cos\rho(x-2t)\,dt+O\Big(\frac{\exp(|Im\,\rho|x)}{\rho^3}\Big), \qquad (6)$$

$$S_i'(x,\lambda)=\cos\rho x+ \\ +\frac{\sin\rho x}{2\rho}\int_0^x q_i(t)\,dt-\frac{1}{2\rho}\int_0^x q_i(t)\sin\rho(x-2t)\,dt+O\Big(\frac{\exp(|Im\,\rho|x)}{\rho^2}\Big). \qquad (7)$$

Функция

$$\Delta(\lambda):=\sum_{i=1}^r\frac{S_i'(1,\lambda)}{S_i(1,\lambda)}\prod_{k=1}^r S_k(1,\lambda) \qquad (8)$$

является целой по λ порядка $1/2$, и ее нули совпадают с собственными значениями краевой задачи B. Подставляя (6) и (7) в (8), вычисляем

$$\Delta(\lambda)=r\Big(\frac{\sin\rho}{\rho}\Big)^{r-1}\cos\rho+\frac{\sin^r\rho}{2\rho^r}\int_0^1\sum_{i=1}^r q_i(t)\,dt$$

$$-\frac{(r-1)\sin^{r-2}\rho\cos^2\rho}{2\rho^r}\int_0^1\sum_{i=1}^r q_i(t)\,dt+o\Big(\frac{\exp(r|Im\,\rho|)}{\rho^r}\Big),\quad |\lambda|\to\infty. \qquad (9)$$

Используя (9), известным методом (см., например, [2, гл.1]) находим, что краевая задача B имеет счетное множество собственных значений $\{\lambda_{ni}\}_{n\geq1,\,i=\overline{1,r}}$. Все собственные значения вещественны и имеют асимптотику

$$\rho_{n1}:=\sqrt{\lambda_{n1}}=\Big(n-\frac{1}{2}\Big)\pi+O\Big(\frac{1}{n}\Big),\quad n\to\infty, \qquad (10)$$

$$\rho_{ni}:=\sqrt{\lambda_{ni}}=n\pi+O\Big(\frac{1}{n}\Big),\quad n\to\infty,\ i=\overline{2,r}.$$

Для определенности возьмем $\lambda_n:=\lambda_{n1}$ и изучим их подробнее. Положим

$$\omega:=\frac{1}{r}\int_0^1\sum_{i=1}^r q_i(t)\,dt. \qquad (11)$$

Подставляя (10) в (9) и используя соотношение $\Delta(\lambda_n)=0$, получаем следующую асимптотическую формулу:

$$\rho_n:=\sqrt{\lambda_n}=\Big(n-\frac{1}{2}\Big)\pi+\frac{\omega}{2\pi n}+o\Big(\frac{1}{n}\Big),\quad n\to\infty. \qquad (12)$$

Используя (6) и (12), вычисляем асимптотику для компонент собственных функций при $n \to \infty$ равномерно по $x \in [0,1]$:

$$\rho_n S_i(x,\lambda_n) = \sin\Big(n-\frac{1}{2}\Big)\pi x - \frac{\beta_i(x)}{2\pi n}\cos\Big(n-\frac{1}{2}\Big)\pi x + o\Big(\frac{1}{n}\Big), \qquad (13)$$

где

$$\beta_i(x) = \int_0^x q_i(t)\,dt - \omega x. \qquad (14)$$

Зафиксируем $i = \overline{1,r}$. Существует N_0 такое, что при всех $n > N_0$ функция $S_i(x,\lambda_n)$ имеет ровно $n-1$ (простых) нулей внутри интервала $(0,1)$, а именно: $0 < x_{ni}^1 < \cdots < x_{ni}^{n-1} < 1$. Точки $X_i := \{x_{ni}^j\}$ называются узловыми точками на ребре e_i относительно собственных значений $\{\lambda_n\}$.

Зафиксируем $i = \overline{1,r}$. Рассмотрим обратную узловую задачу восстановления потенциала $q_i(x)$ на ребре e_i по заданному множеству X_i узловых точек или по некоторой его части. Обозначим

$$\alpha_n^j := \frac{j}{n-1/2}\,.$$

Учитывая (13), получаем следующую асимптотическую формулу для узловых точек при $n \to \infty$ равномерно по j:

$$x_{ni}^j = \alpha_n^j + \frac{1}{2\pi^2 n^2}\Big(\int_0^{\alpha_n^j} q_i(t)\,dt - \omega\alpha_n^j\Big) + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big). \qquad (15)$$

Отметим, что при каждом фиксированном $i = \overline{1,r}$ множество X_i является всюду плотным на $(0,1)$. Не ограничивая общности считаем, что $\omega = 0$ (этого можно добиться сдвигом: $q_i(x) \to q_i(x) - \omega,\ \ \lambda \to \lambda - \omega$). Используя (15), приходим к следующему утверждению.

Теорема 1. *Зафиксируем $i = \overline{1,r}$ и $x \in [0,1]$. Пусть $X_i^0 \subset X_i$ является всюду плотным на $(0,1)$. Пусть $\{x_{ni}^{j_{ni}}\} \in X_i^0$ выбраны так, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_{ni}^{j_{ni}} = x$. Тогда существует конечный предел*

$$g_i(x) := \lim_{n\to\infty} 2\pi^2 n\Big(x_{ni}^{j_{ni}}\Big(n-\frac{1}{2}\Big) - j_{ni}\Big), \qquad (16)$$

причем

$$g_i(x) = \int_0^x q_i(t)\,dt. \qquad (17)$$

Сформулируем теперь теорему единственности и приведем конструктивную процедуру рещения обратной узловой задачи. Для этого наряду с B рассмотрим краевую задачу $\tilde{B} = B(\tilde{q})$ того же вида, но с другим потенциалом. Условимся, что если некоторый символ обозначает объект, относящийся к задаче B, то $\tilde{\alpha}$ будет обозначать аналогичный объект, относящийся к задаче $\tilde{B}$.

Теорема 2. *Зафиксируем* $i = \overline{1, r}$. *Пусть* $X_i^0 \subset X_i$ *– всюду плотное на* $(0,1)$ *подмножество узловых точек. Пусть* $X_i^0 = \tilde{X}_i^0$. *Тогда* $q_i(x) = \tilde{q}_i(x)$ *поочти всюду на* $(0,1)$. *Таким образом, задание* X_i^0 *однозначно определяет потенциал* $q_i(x)$ *на ребре* e_i. *Функция* $q_i(x)$ *может быть построена по формуле*

$$q_i(x) = g_i'(x),$$

где $g_i(x)$ *вычисляется по (17).*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и ННС (проекты 07-01-00003 и 07-01-92000-ННС-а).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Yurko V.A.* Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory. Inverse and Ill-posed Problems Series. Utrecht: VSP, 2002.

2. *Юрко В.А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007.