Рассмотрим следующую обратную задачу.

Задача 1. *По заданным спектральным данным Λ^0 построить Q, h и H.*

Сформулируем необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи 1.

Теорема 1. *Для того чтобы величины $\{\lambda_{nq}, \alpha_{nq}\}_{n\geq 0, q=\overline{1,m}}$ были спектральными данными самосопряженной краевой задачи $L(Q,h,H)$ с потенциалом $Q(x) = [Q_{jk}(x)]_{j,k=\overline{1,m}}$, $Q_{jk}(x) \in L_2(0,\pi)$ и такой, что $h + H + \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi Q(x)\,dx$ является диагональной матрицей, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

1) $\lambda_{nq} \neq \lambda_{kl}$ при $n \neq k$. Если $\lambda_{nq} = \lambda_{nl}$, то $\alpha_{nq} = \alpha_{nl}$;

2) верны асимптотические формулы (2) и (3);

3) все λ_{nq} вещественные. Ранги матриц α_{nq} равны кратностям λ_{nq} и $\alpha_{nq} = (\alpha_{nq})^*$, $\alpha_{nq} \geq 0$ при всех $n \geq 0$, $q = \overline{1,m}$;

4) для любого вектора-строки $\gamma(\lambda)$, который является целой функцией и имеет асимптотику $\gamma(\lambda) = O(\exp(|Im\sqrt{\lambda}|\pi))$ при $|\lambda| \to \infty$, из выполнения условия $\gamma(\lambda_{nq})\alpha_{nq} = 0$ при всех $n \geq 0$, $q = \overline{1,m}$ следует, что $\gamma(\lambda) \equiv 0$.

Данная теорема является обобщением известного результата для скалярного случая (см. [1, с. 72]). Однако отметим, что в матричном случае вводится дополнительное условие 4. Нетрудно показать, что в скалярном случае оно вытекает из условий 1 — 3.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Юрко В.А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007.
2. *Yurko V.A.* Inverse problems for matrix Sturm — Liouville operators // Russian J. of Mathematical Physics. 2006. Vol. 13, №1. P. 111–118.
3. *Yurko V.A.* Inverse problems for the matrix Sturm — Liouville equation on a finite interval // Inverse Problems. 2006. Vol. 22. P. 1139–1149.
4. *Chelkak D., Korotyaev E.* Weyl-Titchmarsh functions of vector-valued Sturm — Liouville operators on the unit interval // J. of Functional Analysis. 2009. Vol. 257, iss. 5. P. 1546–1588.

УДК 519.4

Д.А. Бредихин

О ПОЛУГРУППАХ ОТНОШЕНИЙ С УНАРНЫМИ ОПЕРАЦИЯМИ

Множество бинарных отношений Φ, замкнутое относительно некоторой совокупности Ω операций над ними, образует алгебру (Φ, Ω), называемую *алгеброй отношений.* Всякая такая алгебра может быть рассмотрена как упорядоченная отношением теоретико-множественного включения $\subset$. Для заданного множества Ω операций над бинарными отношениями обозначим через $R\{\Omega\}$ ($R\{\Omega, \subset\}$) класс алгебр (упорядоченных алгебр) отношений с операциями из Ω. Пусть $Var\{\Omega\}$ ($Var\{\Omega, \subset\}$) — многообразие, порожденное классом $R\{\Omega\}$ ($R\{\Omega, \subset\}$).

Основы абстрактно-алгебраического подхода к изучению алгебр отношений были заложены в работах А.Тарского [1]. Им были рассмотрены алгебры отношений со следующими операциями: булевы операции объединения $\cup$, пересечения $\cap$ и дополнения $^-$; операции произведения $\circ$ и обращения $^{-1}$ отношений; нульарные операции $\emptyset$ (пустое множество), I (тождественное отношение), U (универсальное отношение). Существует ряд других важных операций над отношениями [2 — 6]. Как правило, такие операции могут быть выражены через операции алгебр отношений Тарского. Алгебра отношений с указанным типом операций называются *редуктами алгебр отношений Тарского.*

Одной из основных проблем при рассмотрении классов алгебр отношений является проблема нахождения базиса тождеств порожденных ими многообразий, а также выяснения вопроса об их конечной базируемости. Мы сосредоточимся на рассмотрении операций произведения $\circ$, объединения $\cup$ отношений, а также двух унарных операций Δ и ∇, определяемых формулами

$$\Delta(\rho) = \{(x, x) : (\exists y, z)(y, z) \in \rho\}, \quad \nabla(\rho) = \{(x, x) : (\exists y)(y, y) \in \rho\}.$$

Согласно определению $\Delta(\rho) = I$ ($\nabla(\rho) = I$), если $\rho \neq \emptyset$ (отношение ρ содержит неподвижную точку $(y, y) \in \rho$), следовательно, операция Δ может быть рассмотрена как индикатор непустоты отношения, а операция ∇ – как индикатор того, что отношение содержит неподвижную точку.

Заметим также, что операции Δ и ∇ могут быть выражены через операции алгебр отношений Тарского следующим образом: $\Delta(\rho) = (U \circ \rho \circ U) \cap I$ и $\nabla(\rho) = (U \circ (\rho \cap I) \circ U) \cap I$.

Общеизвестно, что класс $R\{\circ\}$ совпадает с классом всех полугрупп, поэтому алгебры отношений, в сигнатуру которых входит операция умножения отношений, могут быть рассмотрены как полугруппы отношений с дополнительными операциями [4].

Основные результаты статьи формулируются в следующих теоремах. Их доказательство существенным образом использует описание эквациональных теорий алгебр отношений с позитивными и примитивно позитивными операциями, полученное автором в работах [7 — 10].

Теорема 1. *Алгебра* $(A, \cdot, ^*)$ *типа* $(2, 1)$ *принадлежит многообра-*

зию $Var\{\circ, \Delta\}$ *тогда и только тогда, когда она удовлетворяет тождествам*

$$(xy)z = x(yz)\ (1), \quad (x^*)^* = x^*\ (2), \ \ xy^* = y^*x\ (3),$$
$$(xy^*)^* = x^*y^*\ (4), \ \ xx^* = x\ (5).$$

Теорема 2. *Упорядоченная алгебра* $(A, \cdot, ^*, \leq)$ *типа* $(2,1)$ *принадлежит многообразию* $Var\{\circ, \Delta, \subset\}$ *тогда и только тогда, когда она удовлетворяет тождествам (1) — (5) и тождеству* $xy^* \leq x$ *(6).*

Теорема 3. *Алгебра* $(A, \cdot, \bullet)$ *типа* $(2,1)$ *принадлежит многообразию* $Var\{\circ, \nabla\}$ *тогда и только тогда, когда она удовлетворяет тождеству (1) и тождествам:*

$$(x^*)^2 = x^*\ (7), \ \ xy\bullet = y\bullet x\ (8),$$
$$(xy)\bullet = (yx)\bullet\ (9), \ \ (xy\bullet)\bullet = x\bullet y\bullet\ (10),$$
$$x\bullet (x^p)\bullet = x\bullet\ (11) \ \ \text{для любого простого } p.$$

Теорема 4. *Упорядоченная алгебра* $(A, \cdot, \bullet, \leq)$ *типа* $(2,1)$ *принадлежит многообразию* $Var\{\circ, \nabla, \subset\}$ *тогда и только тогда, когда она удовлетворяет тождествам (1), (7) — (11) и тождеству* $xy\bullet \leq x$ *(12).*

Теорема 5. *Алгебра* $(A, \cdot, ^*, \bullet)$ *типа* $(2,1,1)$ *принадлежит многообразию* $Var\{\circ, \Delta, \nabla\}$ *тогда и только тогда, когда она удовлетворяет тождествам (1) — (5), (7) — (11) и тождествам*

$$(x^*)\bullet = x^*\ (13), \quad (x\bullet)^* = x\bullet\ (14).$$

Теорема 6. *Упорядоченная алгебра* $(A, \cdot, ^*, \bullet, \leq)$ *типа* $(2,1,1)$ *принадлежит многообразию* $Var\{\circ, \Delta, \nabla, \subset\}$ *тогда и только тогда, когда она удовлетворяет тождествам (1) — (14).*

Теорема 7. *Алгебра* $(A, \cdot, +, ^*)$ *типа* $(2,2,1)$ *принадлежит многообразию* $Var\{\circ, \cup, \Delta\}$ *тогда и только тогда, когда она удовлетворяет тождествам (1) — (5) и тождествам*

$$(x+y)+z = x+(y+z)\ (15), \quad x+x = x\ (16), \quad x+y = y+x\ (17),$$
$$(x+y)z = xz+yz\ (18), \quad x(y+z) = xy+xz\ (19),$$
$$(x+y)^* = x^*+y^*\ (20), \quad x+xy^* = x\ (21).$$

Теорема 8. *Алгебра* $(A, \cdot, +, \bullet)$ *типа* $(2,2,1)$ *принадлежит многообразию* $Var\{\circ, \cup, \nabla\}$ *тогда и только тогда, когда она удовлетворяет тождествам (1), (7) — (11), (15) — (19) и тождествам*

$$(x+y)\bullet = x\bullet + y\bullet\ (22), \quad x+xy\bullet = x\ (23).$$

Теорема 9. *Алгебра* $(A, \cdot, +, ^*, \bullet)$ *типа* $(2,2,1,1)$ *принадлежит многообразию* $Var\{\circ, \cup, \Delta, \nabla\}$ *тогда и только тогда, когда она удовлетворяет тождествам (1) — (5), (7) — (11), (13) — (23).*

Теорема 10. *Многообразия* $Var\{\circ, \nabla\}$, $Var\{\circ, \nabla, \subset\}$, $Var\{\circ, \Delta, \nabla\}$, $Var\{\circ, \cup, \nabla\}$ *и* $Var\{\circ, \cup, \Delta, \nabla\}$ *не являются конечно базируемыми.*

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Tarski A.* On the calculus of relations // J. Symbolic Logic. 1941. Vol. 6. P. 73–89.

2. *Вагнер В.В.* Теория отношений и алгебра частичных преобразований // Теория полугрупп и ее приложения: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1965. Вып. 1. С. 3–197.

3. *Henkin L., Monk J.D., Tarski A.* Cylindric Algebras. North-Holland, Amsterdam, part I, II, 1971, 1985.

4. *Schein B.M.* Relation algebras and function semigroups // Semigroup Forum. 1970. Vol. 1. P. 1–62.

5. Böner F, Pöschel F.R. Clones of operations on binary relations // Contributions to general algebras. 1991. Vol. 7. P. 50–70.

6. *Bredikhin D.A.* On varieties of semi-groups of relations with operations of cylindrofication // Contributions to General Algebra. 2005.

7. *Бредихин Д.А.* Эквациональная теория алгебр отношений с позитивными операциями // Изв. вузов. Сер. математика. 1993. № 3. С. 23–30.

8. *Бредихин Д.А.* О квазитождествах алгебр отношений с диофантовыми операциями // Сиб. Мат. журн. 1997. Т. 38. С. 29–41.

9. *Бредихин Д.А.* Об алгебрах отношений с диофантовыми операциями // Докл. РАН. 1998. Т. 360. С. 594–595.

10. *Andreka H., Bredikhin D.A.* The equational theory of union-free algebras of relations // Alg. Univers. 1994. Vol. 33. P. 12–25.

УДК 517.984

С.А. Бутерин

О КОНСТРУКТИВНОМ РЕШЕНИИ НЕПОЛНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ

1. Пусть $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ — спектр краевой задачи Штурма—Лиувилля $L = L(q(x), h, H)$:

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad 0 < x < \pi, \tag{1}$$

$$U(y) := y'(0) - hy(0) = 0, \quad V(y) := y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \tag{2}$$

где $q(x) \in L(0, \pi)$ — комплекснозначная функция, а $h,\ H$ — комплексные числа.

В статье исследуется одна неполная обратная спектральная задача для L. Обратные задачи заключаются в восстановлении операторов по некоторым их спектральным характеристикам [1]. Известно, что коэффициенты L однозначно восстанавливаются по функции Вейля, что равносильно, например, заданию спектров двух краевых задач для уравнения (1) с одним общим краевым условием. В неполных обратных задачах требуется восстановить оператор по части спектральных данных при наличии о нем априорной информации. Рассмотрим следующую неполную обратную задачу.