4. *Левин Б.Я.* Распределение корней целых функций. М.: Гос. изд-во техн.-теор. лит., 1956.

5. *Buterin S.A.* On inverse spectral problem for non-selfadjoint Sturm — Liouville operator on a finite interval // J. Math. Anal. Appl. 2007. Vol. 335, iss. 1. P. 739–749.

УДК 517.518.82

И.Ю. Выгодчикова

НАИЛУЧШЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ СЕГМЕНТНОЙ ФУНКЦИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИМ ПОЛИНОМОМ ПРИ НАЛИЧИИ ОГРАНИЧЕНИЙ

Рассматривается дискретная задача наилучшего равномерного приближения сегментной функции алгебраическим полиномом при наличии ограничений на значения полинома сверху и снизу. Получен критерий оптимальности в форме, сравнимой с известным в теории приближений альтернансом П.Л. Чебышева.

1. Постановка задачи. Пусть n, N – целые числа, $n \geq 0$, $N \geq n+1$, $T = \{t_0 < t_1 < ... < t_N\}$, $A = (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $p_n(A,t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$. На сетке T заданы сегментные функции $\Phi(\cdot)$ и $\Psi(\cdot)$: $\Phi(t_k) = [y_{1,k}; y_{2,k}]$, $y_{2,k} \geq y_{1,k}$, $\Psi(t_k) = [\nu_{1,k}; \nu_{2,k}]$, $\nu_{2,k} \geq \nu_{1,k}, k = \overline{0,N}$. Обозначим через $f(A,t_k) = \max\{p_n(A,t_k) - y_{1,k}, y_{2,k} - p_n(A,t_k)\}$, $g(A,t_k) = \max\{\nu_{1,k} - p_n(A,t_k),$ $p_n(A,t_k) - \nu_{2,k}\}$, $h(A) = \max_{k=\overline{0,N}} g(A,t_k)$.

Рассмотрим задачу:

$$\rho(A) := \max_{k=\overline{0,N}} f(A,t_k) \longrightarrow \min_{A \in D = \{A \in \mathbb{R}^{n+1} : h(A) \leq 0\}}. \qquad (1)$$

2. Существование решения. Обозначим

$$\rho^{**} = \min_{A \in D} \rho(A), \Re(\nu) = \{A \in D : \rho(A) = \rho^{**}\}.$$

Рассмотрим задачу о псевдовнутренней оценке [1]:

$$\delta(A) := min_{k=\overline{0,N}} min\{p_n(A,t_k) - \nu_{1,k}; \nu_{2,k} - p_n(A,t_k)\} \longrightarrow max_{A \in \mathbb{R}^{n+1}}. \quad (2)$$

Обозначим множество решений задачи (2) через

$$\Omega = \left\{A \in R^{n+1} : \delta(A) = \delta^*\right\},$$

где $\delta^* = \max_{A\in\mathbb{R}^{n+1}} \delta(A)$.

Теорема 1. $\delta^* \geq 0 \iff D \neq \emptyset$.

Доказательство. Пусть $A^* \in \Omega$. Неравенство $\delta(A^*) \geq 0$ можно записать в виде $p_n(A^*, t_k) - \nu_{1,k} \geq 0, \nu_{2,k} - p_n(A^*, t_k) \geq 0, \forall k = \overline{0, N}$. Последнее означает, что $A^* \in D$.

Для задачи без ограничений (см., напр., [2]):

$$\rho(A) := \max_{k=\overline{0,N}} f(A, t_k) \longrightarrow \min_{A\in\mathbb{R}^{n+1}}, \tag{3}$$

положим $\rho^* = \min\limits_{A\in R^{n+1}} \rho\,(A)$, $\Re = \left\{A \in R^{n+1} : \rho\,(A) = \rho^*\right\}$.

Следствием из [1, 3] является

Теорема 2. *Для того чтобы $|D| = 1$, необходимо и достаточно, чтобы задача (2) имела единственное решение и $\delta^* = 0$.*

Далее считаем, что $|D| > 1$.

3. Критерий решения. Обозначим через $\partial z\,(A)$ субдифференциал функции $z\,(A)$. Следствием из [3, с. 258] является

Лемма 1. *Пусть $\Re \cap D = \emptyset$. Для того чтобы вектор A^* был решением задачи (1), необходимо выполнение включения:*

$$0_{n+1} \subset co\left\{\partial\rho\,(A^*)\,, \partial h\,(A^*)\right\}.$$

Приведем вспомогательный факт из [2, 4].

Определим на подмножестве TT сетки T многозначное отображение $\xi(\cdot) : TT \Rightarrow 2^{\mathbb{R}}$, образами которого являются некоторые подмножества $\xi(t)$ из $\mathbb{R}$.

Лемма 2. *Для того чтобы*

$$0_{n+1} \in co\left\{\xi(t)(1, t, \ldots, t^n) : t \in TT\right\},$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось хотя бы одно из условий:

1) существует точка $t_l \in T$, в которой $0 \in \xi(t_l)$;

2) существует селектор $\eta(t) \in \xi(t)$ и набор упорядоченных чисел $t_{j_1} < t_{j_2} < \cdots < t_{j_{n+2}}$ из множества TT таких, что $\eta(t_{j_i}) \neq 0$ и $sign\,\eta(t_{j_i}) = -sign\,\eta(t_{j_{i+1}})$, $i = \overline{1, n+1}$.

Определим следующие подмножества сетки T :

$$R_1^\rho\,(A) := \left\{t_k \in T : \rho\,(A) = p_n\,(A, t_k) - y_{1,k} > y_{2,k} - p_n\,(A, t_k)\right\},$$

$$R_2^\rho\,(A) := \left\{t_k \in T : \rho\,(A) = p_n\,(A, t_k) - y_{1,k} < y_{2,k} - p_n\,(A, t_k)\right\},$$

$$R_1^h\,(A) := \left\{t_k \in T : h\,(A) = p_n\,(A, t_k) - \nu_{2,k} > \nu_{1,k} - p_n\,(A, t_k)\right\},$$

$$R_2^h(A) := \{t_k \in T : h(A) = p_n(A, t_k) - \nu_{2,k} < \nu_{1,k} - p_n(A, t_k)\},$$
$$RR(A) = R_1^\rho(A) \cup R_2^\rho(A),$$

$$R_3^\rho(A) := \{t_k \in T : \rho(A) = p_n(A, t_k) - y_{1,k} = y_{2,k} - p_n(A, t_k)\},$$

$$R_3^h(A) := \{t_k \in T : h(A) = p_n(A, t_k) - \nu_{2,k} = \nu_{1,k} - p_n(A, t_k)\}.$$

Обозначим через

$$R_1(A) = R_2^h(A) \cup R_1^\rho(A),$$
$$R_2(A) = R_1^h(A) \cup R_2^\rho(A).$$

Теорема 3. Критерий решения задачи (1). *Пусть* $|D| > 1$. *Вектор* A^* *является решением задачи (1) тогда и только тогда, когда либо* $A^* \in \Re \cap D$, либо

$$h(A^*) = 0 \tag{4}$$

и выполняется хотя бы одно из условий:

(I) $R_3^h(A^*) \neq \emptyset$, $RR(A^*) \cap R_3^h(A^*) \neq \emptyset$,

(II) $\exists$ $n+2$ точки $\left\{t_{j_0} < ... < t_{j_{n+1}}\right\} \subset T$ *такие, что если* $t_k \in R_1(A^*)\,(R_2(A^*))$, *то* $t_{k+1} \in R_2(A^*)\,(R_1(A^*))$ *для* $k = \overline{0, n+1}$.

Доказательство. Пусть $\Re \cap D = \emptyset$, $A^* \in \Re(\nu)$. Тогда выполняется (4). В соответствии с субдифференциальным исчислением имеем

$$\partial_A f(A^*, t) = \begin{cases} (1, t, \ldots, t^n), \text{ если } t \in R_1^\rho(A^*), \\ -(1, t, \ldots, t^n), \text{ если } t \in R_2^\rho(A^*). \end{cases} \tag{5}$$

$$\partial_A g(A^*, t) = \begin{cases} (1, t, \ldots, t^n), \text{ если } t \in R_2^h(A^*), \\ -(1, t, \ldots, t^n), \text{ если } t \in R_1^h(A^*), \\ [-1,1](1, t, \ldots, t^n), \text{ если } t \in R_3^h(A^*). \end{cases} \tag{6}$$

Теперь утверждение необходимости теоремы вытекает из лемм 1, 2 и формул (5), (6). Достаточность получается из свойств полинома и рассуждений, аналогичных [1].

Из теоремы 3 и [3] вытекает

Теорема 4. Критерий единственности решения задачи (1). При $\Re \cap D = \emptyset$ для единственности решения задачи (1) необходимо и достаточно выполнения либо условия (II) теоремы 3, либо условия (I) при наличии во множестве $R_3^h(A^*)$ не менее чем (n+1) точек.

Пример 1. Пусть $T = \{0 < 1 < 2 < 3\}$, $\Phi(0) = [1; 2]$, $\Phi(1) = [1; 1]$, $\Phi(2) = [2; 3]$, $\Phi(3) = [0; 0]$, $\Psi(0) = [0; 5]$, $\Psi(1) = [1; 5]$, $\Psi(2) = [0; 5]$,

$\Psi(3) = [0;5]$ $n = 1$, $\nu = 1$. Решение задачи (1): $p_1(t) = 2/3 + 1/3t$. Решением безусловной задачи является полином $p_1(t) = 7/3 - 1/3t$.

Пример 2. Изменим условие предыдущего примера, лишь положив $\Psi(0) = [5;5]$. Задача (1) имеет бесконечно много решений $p_1(t) = 5 + \alpha t$, $\alpha \in [-2; -1/3]$, $t_s = 0$. При этом заметим, что, например, для полинома $p_1(t) \equiv 5$ выполняется условие $R_3^h(A^*) \neq \emptyset$, но решением задачи он не является.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (проект НШ-2970.2008.1).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Выгодчикова И.Ю.* О сведении задачи о псевдовнутренней оценке многозначного отображения полиномом к задаче о внешней оценке // Современные методы теории функций и смежные проблемы: Тез. докл. Воронеж. Зимней мат. шк. Воронеж, 2005. С. 62–63.

2. *Демьянов В.Ф., Рубинов А.М.* Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М, 1990.

3. *Выгодчикова И.Ю.* О единственности решения задачи наилучшего приближения многозначного отображения алгебраическим полиномом // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2006. Т. 6. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 2. С. 11–19.

4. *Дудов С.И.* О двух вспомогательных фактах для исследования задач полиномиального приближения // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов, 2007. Вып. 9. С. 22–26.

УДК 514.764

С.В. Галаев, А.В. Гохман

ВНУТРЕННИЕ НЕГОЛОНОМНЫЕ СВЯЗНОСТИ, СОВМЕСТИМЫЕ С ДОПУСТИМОЙ ПОЧТИ СИМПЛЕКТИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ

В статье находятся необходимые и достаточные условия существования внутренних неголономных связностей, совместимых с допустимой почти симплектической структурой.

Пусть D — гладкое распределение коразмерности 1, заданное вместе со своим оснащением $D^{\perp}$, на гладком многообразии X размерности n и класса C^{∞}. Следуя В.В. Вагнеру, такое распределение будем называть *неголономным многообразием размерности* $n-1$ *и коразмерности* 1. Заметим, что с некоторыми уточнениями излагаемые в настоящей статье результаты можно обобщить на неголономные многообразия произвольной коразмерности. С точки зрения механики неголономное многообразие интерпретирует линейные неголономные связи, накладываемые на механическую систему [1].