УДК 518.9

Е.В. Гудошникова

ПОРЯДОК ПРИБЛИЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ КЛАССОМ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Данная статья является продолжением работ [1, 2], в которых рассматривалась последовательность операторов

$$L_n(f;x) = \frac{1}{g(z(x))^n} \sum_{k=0}^{\infty} f\Big(\frac{k}{n}\Big)\alpha_{k,n}\left[\frac{z(x)}{\psi(z(x))}\right]^k,$$

где $g(z)$ и $\psi(z)$ – аналитические в круге $|z| < a$, принимающие положительные значения на $[0;a]$, такие что на $[0;a]$ $x\psi'(x) < \psi(x)$ и числа

$$\alpha_{0,n} = g(0)^n \text{ и } \alpha_{k,n} = \frac{1}{k!}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left[\Big(g(z)^n\Big)'\psi(z)^k\right]_{z=0}, \quad k = \overline{1,\infty},$$

неотрицательны, а $z(x)$ – функция, обратная к функции

$$x(z) = \frac{z\psi(z)}{\psi(z) - z\psi'(z)} \cdot \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

В работе [1] было показано, что $x(z)$ монотонна на $[0;a]$, $z'(x) > 0$, и $g'(z) > 0$.

Обозначим $v(x) = \dfrac{xg(x)}{z'(x)g'(x)}$.

В работе [2] была доказана теорема, несложное уточнение которой может быть сформулировано следующим образом

Теорема 1.

Для $f \in C[0;x(a)]$ $\quad |L_n(f;x) - f(x)| \le 2\omega\left(f;\sqrt{\dfrac{v(x)}{n}}\right)$.

Для $f \in C^1[0;x(a)]$ $\quad |L_n(f;x) - f(x)| \le 2\sqrt{\dfrac{v(x)}{n}}\cdot\omega\left(f';\sqrt{\dfrac{v(x)}{n}}\right)$.

Для $f \in C^2[0;x(a)]$ $\quad |L_n(f;x) - f(x)| \le \dfrac{v(x)}{2n}\left[\omega\left(f'';\sqrt{\dfrac{v(x)}{n}}\right) + \|f''\|\right]$

и $|L_n(f;x) - f(x) - \dfrac{v(x)}{2n}| \le \dfrac{v(x)}{n}\cdot\omega\left(f'';\sqrt{\dfrac{v(x)}{n}}\right)$.

Из теоремы 1 видно, что порядок приближения операторами L_n улучшается при переходе от класса непрерывных функций к дифференцируемым и от дифференцируемых к дважды дифференцируемым, но не дальше, и порядок приближения r раз дифференцируемых функций при $r \geq 2$ есть $1/n$.

Следуя идее Бернштейна, рассмотрим последовательность операторов

$$M_n(f;x) = L_n(f;x) - \frac{1}{2} L_n((t-x)^2;x) L_n(f'';x).$$

Теорема 2. Для $f \in C^2[0;x(a)]$

$$|M_n(f;x) - f(x)| \leq 2\frac{v(x)}{n}\omega\left(f''; \sqrt{\frac{v(x)}{n}}\right).$$

Доказательство. По формуле Тейлора

$$f(t) = f(x) + f'(x)(t-x) + \frac{1}{2}f''(x)(t-x)^2 + R_n(x,t), \tag{1}$$

где $R_n(x,t) = \dfrac{1}{2}[f''(\xi) - f''(x)](t-x)^2$, ξ – точка между x и t.

Применим к равенству (1) оператор L_n:

$$L_n(f(t);x) = f(x)L_n(1;x) + f'(x)L_n((t-x);x) + \frac{1}{2}f''(x)L_n((t-x)^2;x) +$$
$$+ L_n(R_n(x;t);x).$$

Как было показано в работе [2],

$$L_n(1;x) = 1, \qquad L_n(t-x;x) = 0, \qquad L_n((t-x)^2;x) = \frac{v(x)}{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L_n((f(t);x) = f(x) + \frac{1}{2}f''(x)\frac{v(x)}{n} + L_n(R_n(x,t);x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_n(f;x) - f(x) = \frac{1}{2}\left[f''(x) - L_n(f''(t);x)\right]\frac{v(x)}{n} + L_n(R_n(t,x);x).$$

Во-первых, по теореме 1

$$|L_n(f'';x) - f''(x)| \leq 2\omega\left(f''; \sqrt{\frac{v(x)}{n}}\right).$$

Во-вторых, для любого $\delta > 0$

$$|f''(\xi) - f''(x)| \leq \left(1 + \frac{(t-x)^2}{\delta^2}\right)\omega(f'';\delta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L_n(R_n(t,x);x) \le \frac{1}{2}\omega(f'';\delta)\left[L_n((t-x)^2;x) + \frac{1}{\delta^2}L_n((t-x)^4;x)\right].$$

Нетрудно получить, что $L_n((t-x)^4;x) = \dfrac{v(x)v'^2(x) + v^2(x)v''(x)}{n^3}$, поэтому, взяв $\delta = \dfrac{v(x)}{n}$, получаем

$$L_n(R_n(t,x);x) \le \frac{1}{2}\omega\left(f''; \sqrt{\frac{v(x)}{n}}\right)\frac{v(x)}{n}\left[1 + \frac{v'^2(x)}{v(x)n} + \frac{v''(x)}{n}\right].$$

Следовательно,

$$|M_n(f;x) - f(x)| \le 2\frac{v(x)}{n}\omega\left(f''; \sqrt{\frac{v(x)}{n}}\right).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 07-01-00167).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Гудошникова Е.В.* Конструкция линейных положительных операторов // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2007. Вып. 9. С. 20–22.

2. *Гудошникова Е.В.* Конструкции ЛПО и их аппроксимативные свойства // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2008. Вып. 10. С. 18–20.

УДК 517.927.25

А.П. Гуревич

АСИМПТОТИКА ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

В спектральной теории линейных дифференциальных и интегральных операторов важную роль играет существование у рассматриваемых уравнений линейно независимой системы решений, которая имеет асимптотику по спектральному параметру, такую что ее главный член совпадает с решением некоторого канонического уравнения и при этом имеет простое представление. Использование асимптотических представлений решений позволяет получить информацию о расположении спектра оператора, изучить поведение его резольвенты, сделать вывод о свойствах ряда Фурье по собственным и присоединенным функциям [1]. В случае, когда собственные значения оператора находятся в полосе, содержащей вещественную