Остается заметить, что объединение получившихся секторов совпадает со всей плоскостью.

Будем в дальнейшем считать, что точки $A_j(k)$ в уравнении (6) выбраны так, что на отрезках интегрирования выполняются неравенства (7). Но тогда при $\rho \in \overline{P}$ справедливы оценки $\operatorname{Re} \rho(\omega_j - \omega_k)(z - \xi) = O(1)$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Для получения асимптотических формул (4) остается свести уравнение (6) к системе интегральных уравнений (см. [1, с. 58]) и воспользоваться теоремой 1.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 528 с.

2. *Хромов А.П.* Разложение по собственным функциям обыкновенных линейных дифференциальных операторов с нерегулярными распадающимися краевыми условиями // Мат. сб. 1966. Т. 70(112), № 3. С. 310–329.

УДК 519.583.3

С.И. Дудов, Е.А. Мещерякова

ОБ АСФЕРИЧНОСТИ ВЫПУКЛОГО КОМПАКТА

1. Задачей об асферичности выпуклого компакта D из конечномерного пространства $\mathbb{R}^p$ с непустой внутренностью: $\operatorname{int} D \neq \emptyset$ называют

$$\varphi(x) \equiv \frac{R(x)}{\rho(x)} \longrightarrow \min_{x \in D}, \tag{1}$$

где функции

$$R(x) = \max_{y \in D} n(x - y), \ \rho(x) = \min_{y \in \Omega} n(x - y)$$

выражают соответственно расстояния от точки x до самой удаленной точки компакта D и самой близкой точки множества $\Omega = \overline{\mathbb{R}^p \setminus D}$ в заданной норме $n(\cdot)$. Функция $R(x)$ является выпуклой на $\mathbb{R}^p$, а $\rho(x)$ — вогнутой на D, известны соответствующие формулы субдифференциала $\underline{\partial R(x)}$ и супердифференциала $\overline{\partial \rho(x)}$ этих функций [1, 2]. Показатель асферичности $\varphi^* = \min\{\varphi(x) : x \in D\}$ используется (обычно для случая евклидовой нормы) при описании свойств выпуклого тела и построении методов его приближения, в частности, при полиэдральной аппроксимации (см., напр., [3]). Однако авторам не удалось обнаружить какие-либо результаты по исследованию задачи (1). В данной статье получен критерий решения задачи (1), а также приводится достаточное условие единственности решения.

2. Приведем несколько вспомогательных фактов, которые далее в п. 3 будут использованы при доказательстве основных результатов.

Лемма 1 [2]. *Функции $R(x)$ и $\rho(x)$ являются глобально липшицевыми на $\mathbb{R}^p$, причем для любых x_1 и x_2 из $\mathbb{R}^p$ выполняются неравенства*

$$|R(x_1) - R(x_2)| \leq n(x_1 - x_2), \tag{2}$$

$$|\rho(x_1) - \rho(x_2)| \leq n(x_1 - x_2). \tag{3}$$

Функция $R(x)$, являясь выпуклой и конечной на $\mathbb{R}^p$, дифференцируема по всем направлениям в любой точке $x \in \mathbb{R}^p$. Поэтому из (2) вытекает

Следствие. *Для любого направления $g \in \mathbb{R}^p$ справедливо неравенство*

$$R'(x, g) \equiv \lim_{\alpha \downarrow 0} \alpha^{-1}[R(x + \alpha g) - R(x)] \leq n(g), \forall x \in \mathbb{R}^p.$$

Лемма 2 [2]. *Если D – строго выпуклое множество и точки $x_1, x_2 \in$ $\in D$ удовлетворяют неравенству*

$$\rho(x_1) \leq \rho(x_2) < \rho(x_1) + n(x_1 - x_2),$$

то для любого $\alpha \in (0, 1)$ выполняется строгое неравенство

$$\rho(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) > \alpha\rho(x_1) + (1 - \alpha)\rho(x_2).$$

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$f(x, \beta) \equiv R(x) - \beta\rho(x) \longrightarrow \min_{x \in D} \tag{4}$$

при некотором фиксированном значении $\beta > 0$.

Лемма 3. *Для того чтобы точка x^* была решением задачи (4), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение*

$$[\underline{\partial R}(x^*) - \beta\overline{\partial\rho}(x^*)] \bigcap K^+(x^*, D) \neq \emptyset, \tag{5}$$

где $K^+(x^*, D)$ – сопряженный конус к конусу возможных направлений множества D в точке x^*.

Доказательство. Поскольку функция $R(x)$ выпукла, а $\rho(x)$ – вогнута на D, то функция $f(x, \beta)$ выпукла по x на D. Поэтому, как известно [1], критерием того, что точка $x^* \in D$ будет решением задачи (4), является выполнение в ней соотношения

$$\partial_x f(x^*, \beta) \bigcap K^+(x^*, D) \neq \emptyset,$$

где $\partial_x f(x^*, \beta)$ – субдифференциал функции $f(x,\beta)$ по x в точке x^*. Осталось заметить, что применяя теорему Моро—Рокафеллара [1] мы имеем для $x \in D$

$$\partial_x f(x,\beta) = \underline{\partial R}(x) - \beta \overline{\partial \rho}(x).$$

Лемма доказана.

3. Критерий для центра асферичности дает

Теорема 1. *Для того чтобы точка $x^* \in \operatorname{int} D$ была решением задачи (1), необходимо и достаточно, чтобы*

$$\rho(x^*)\underline{\partial R}(x^*) \bigcap R(x^*)\overline{\partial \rho}(x^*) \neq \emptyset. \tag{6}$$

Доказательство. В [4] было показано, что функция является субдифференцируемой (в смысле определения Демьянова—Рубинова [5]) и на этой основе доказана необходимость соотношения (6). Докажем его достаточность. Предположим, точка $x^* \in \operatorname{int} D$ удовлетворяет соотношению (6), однако существует точка $y^* \in \operatorname{int} D$, для которой

$$\varphi(y^*) < \varphi(x^*). \tag{7}$$

Очевидно соотношение (6) эквивалентно включению

$$o_p \in \underline{\partial R}(x^*) - \varphi(x^*)\overline{\partial \rho}(x^*).$$

Поскольку для точки $x^* \in \operatorname{int} D$ конус $K^+(x^*, D) = \{o_p\}$, из него следует справедливость соотношения (5). Поэтому в соответствии с леммой 3 имеем

$$f(x^*, \varphi(x^*)) = \min_{x \in D} f(x, \varphi(x^*)). \tag{8}$$

Из (8) получаем

$$R(y^*) - \varphi(x^*)\rho(y^*) \geq R(x^*) - \varphi(x^*)\rho(x^*) = 0. \tag{9}$$

А с другой стороны, в силу неравенства (7) выполняется

$$R(y^*) - \varphi(x^*)\rho(y^*) < R(y^*) - \varphi(y^*)\rho(y^*) = 0,$$

что противоречит (9). Теорема доказана.

Теорема 2. *Если D – строго выпуклый компакт, то задача (1) имеет единственное решение.*

Доказательство. Предположим, что $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = \varphi^*$, а следовательно,

$$R(x_1) - \varphi^*\rho(x_1) = R(x_2) - \varphi^*\rho(x_2) = 0.$$

Отсюда вытекает

$$R(x) - \varphi^* \rho(x) \equiv 0, x \in [x_1, x_2], \tag{10}$$

поскольку противное означало бы для выпуклой по x функции $f(x, \varphi^*)$ существование точки $x_0 \in (x_1, x_2)$, в которой $R(x_0) - \varphi^* \rho(x_0) < 0$, а значит, $\varphi(x_0) < \varphi^*$, что является противоречием. Легко видеть, что аффинное поведение (10) функции $f(x, \varphi^*)$ на отрезке $[x_1, x_2]$ означает, что и функции $R(x)$ и $\rho(x)$ также обязаны вести себя на этом отрезке как аффинные функции. Тогда поведение функции $R(x)$ можно выразить в виде

$$R(x_1 + \alpha(x_2 - x_1)) = R(x_1) + \alpha R'(x_1, x_2 - x_1),\ \alpha \in [0, 1]. \tag{11}$$

С другой стороны, аффинность поведения функции $\rho(x)$ в силу леммы 2 влечет равенство $\rho(x_2) = \rho(x_1) + n(x_1 - x_2)$, а следовательно, и

$$\rho(x_1 + \alpha(x_2 - x_1)) = \rho(x_1) + \alpha n(x_1 - x_2),\ \alpha \in [0, 1]. \tag{12}$$

Из (10) – (12) получаем

$$f(x_1+\alpha(x_2-x_1), \varphi^*) = R(x_1)-\varphi^*\rho(x_1)+\alpha(R'(x_1, x_2-x_1)-\varphi^* n(x_1-x_2)) = 0,$$

откуда, учитывая (10), вытекает $R'(x_1, x_2 - x_1) = \varphi^* n(x_1 - x_2)$. Но это противоречит следствию леммы 1, поскольку $\varphi^* > 1$. Теорема доказана.

Простые примеры показывают, что решение задачи может быть не единственным. Кроме того, условие строгой выпуклости компакта D, являясь достаточным, не является необходимым для единственности решения.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (проект НШ-2970.2008.1).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Пшеничный Б.Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980.

2. *Dudov S.I., Zlatorunskaya I.V.* Best approximation of a compact convex set by a ball in an arbitrary norm // Advances in Math.Research. Nova Science Publishers, Inc., 2003. Vol. 2. P. 81–114.

3. *Каменев Г.К.* Скорость сходимости адаптивных методов полиэдромной аппроксимации выпуклых тел на начальном этапе // ЖВМ и МФ 2008. Т. 48, №5. С. 763–778.

4. *Мещерякова Е.А.* О двух задачах по оценке выпуклого компакта шаром // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2008. Вып. 10. С. 48–50.

5. *Демьянов В.Ф., Рубинов А.М.* Основы негладкого анализа и квазидифференциального исчисления. М.: Наука, 1990.