БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с.

УДК 517.51+517.98

С.А. Крейс

АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ ДУАЛЬНЫЕ ФРЕЙМЫ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В данной статье рассматриваются фреймы в банаховых пространствах. Для альтернативных дуальных фреймов доказывается аналог утверждения, ранее полученного в [1] для фреймов в гильбертовых пространствах.

Определение 1. *Фреймом в гильбертовом пространстве* H называется система векторов $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \subset H \backslash \{0\}$, для которой существуют такие положительные вещественные константы A и B, что выполняются рамочные неравенства:

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |(f, \varphi_n)|^2 \leq B \|f\|^2$$

для любого элемента $f \in H$.

Константы A и B из данного определения называют *фреймовыми константами.* При этом A называется *нижней фреймовой константой*, а B – *верхней фреймовой константой.* Последовательность векторов пространства H называют *бесселевой последовательностью в* H, если для нее существует конечная верхняя фреймовая константа.

Определение 2. Фрейм (y_n) гильбертова пространства H называется *альтернативным дуальным фреймом* для фрейма (x_n), если для любого $x \in H$ справедлива формула восстановления:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, y_n)\, x_n.$$

Следующая теорема получена в работе [1].

Теорема 1. *Если (x_n) и (y_n) — бесселевы последовательности в гильбертовом пространстве H, для любого $x \in H$ удовлетворяющие равенствам*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, y_n)\, x_n,$$

тогда (x_n) и (y_n) — альтернативные дуальные фреймы.

После того как Грошениг [2] впервые обобщил фреймы на банаховы пространства и назвал их *атомарными разложениями*, в этой области наблюдалась очень большая активность. Существует несколько различных подходов к определению фрейма в банаховом пространстве. Например, в работе [1, опр. 3.3] фрейм определяется как проекция безусловного базиса объемлющего банахова пространства.

Пусть X — банахово пространство и X^* — сопряженное к нему. Далее, пусть задано банахово пространство X_d, состоящее из числовых последовательностей $a = (a_n)$ и удовлетворяющее следующему условию: система канонических ортов (ε_n) образует базис в X_d. Кроме того, сопряженная система (ε_n^*) образует базис в X_d^*. Тогда сопряженное пространство X_d^* мы можем рассматривать снова как пространство последовательностей.

Определение 3. Пусть заданы системы $(x_n) \subset X$ и $(y_k) \subset X^*$. Предположим, что существуют положительные постоянные $A, \widetilde{A}, B, \widetilde{B}$ такие, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство

$$A \left\|x\right\|_X \leq \left\|(x, y_n)\right\|_{X_d} \leq B \left\|x\right\|_X \tag{1}$$

и любого $y \in X^*$ выполняется неравенство

$$\widetilde{A} \left\|y\right\|_{X^*} \leq \left\|(x_n, y)\right\|_{X_d^*} \leq \widetilde{B} \left\|y\right\|_{X^*}. \tag{2}$$

Если при этом справедлива формула восстановления

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, y_n)\, x_n, \tag{3}$$

то будем говорить, что пара систем (x_n) и (y_n) образует *фрейминг.*

Замечание. Фрейминг по сути является аналогом альтернативных дуальных фреймов в гильбертовых пространствах. Действительно, если рассматривать формулы (1) и (2) в случае, когда X — гильбертово пространство, то системы $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ являются фреймами в X в смысле определения 1, а из равенств (3) следует, что они удовлетворяют определению 2, то есть образуют пару альтернативных дуальных фреймов.

Сформулируем утверждение, аналогичное теореме 1, для фрейминга в банаховом пространстве.

Теорема 2. *Пусть $(x_n) \subset X$, $(y_n) \subset X^*$ и существует константа $B > 0$, что при всех y из X^**

$$\left\|(x_n, y)\right\|_{X_d^*} \leq B \left\|y\right\|_{X^*}.$$

Предположим, что при любом $x \in X$:

$$\Big((x, y_n)\Big) \in X_d$$

и справедлива формула восстановления

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, y_n)\, x_n.$$

Тогда пара систем (x_n) и (y_n) образует фрейминг.

Доказательство данного утверждения удобно разбить на несколько вспомогательных лемм.

Лемма 1. *Пусть (ε_n) — система канонических ортов, образующая базис в X_d. Определим оператор $L : X_d \mapsto X$, действующий по формуле $L\varepsilon_n = x_n$ при всех $n \in N$. Тогда сопряженный оператор L^* имеет следующий вид:*

$$L^* y = \Big((x_n, y)\Big)$$

при любом $y \in X^*$.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда оператор L^* инъективен, то есть для любого $y \in X^*$ выполняется нижнее неравенство в (2).*

Лемма 3. *Пусть последовательности (x_n) и (y_n) удовлетворяют условиям теоремы 2. Тогда для последовательности (y_n) также справедлива формула восстановления:*

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n, y)\, y_n$$

при любом выборе $y \in X^*$.

Схема доказательства теоремы 2. Объединяя результаты леммы 1 и леммы 2, получаем, что выполнение верхнего неравенства в (1) для (x_n) равносильно ограниченности оператора L, определенного в лемме 1. Из формулы восстановления следует, что L сюръективен, и тем самым сопряженный оператор L^* инъективен. А из последнего вытекает существование нижней константы в (2) для системы (x_n). Неравенства (1) для системы (y_n) следуют из леммы 3 с учетом принципа равномерной ограниченности Банаха — Штейнгауза и двойственности операторных инъекций и сюръекций. Таким образом, системы (x_n) и (y_n) удовлетворяют неравенствам (1) и (2) соответственно. Кроме того, для них верна формула восстановления (3). Следовательно, они образуют фрейминг.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Casazza P., Han D., Larson D.* Frames for Banach spaces // Contemp. Math. 1999. Vol. 247. P. 149–182.

2. *Grochenig K.* Describing functions: atomic decompositions versus frames // Monat. Math. 1991. Vol. 112. P. 1–41.