УДК 512.53

В.А. Молчанов

О СТРОЕНИИ ГОМОМОРФИЗМОВ ПОЛУГРУПП ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ

Одной из основных задач алгебраической теории автоматов [1] является изучение взаимосвязи морфизмов категории автоматов и категорий их компонент – множеств состояний, полугрупп входных символов и множеств выходных символов автоматов. Так как полугруппы входных символов автоматов естественно представляются полугруппами вектор-функций, то определенный интерес представляет описание морфизмов таких полугрупп на языке алгебры отношений [2].

Целью настоящей статьи является описание строения сюрьективных гомоморфизмов полугрупп вектор-функций, являющихся эпиморфизмами категории полугрупп.

Пусть X, Y – некоторые непустые множества. Обозначим $T(X)$ как множество всех преобразований множества X, $F(X,Y)$ – множество всех отображений множества X в множество Y. Отображения множества X множество $X \times Y$ обозначаются $f : x \to X \times Y$ и называются вектор-функциями на множестве X со значениями в множестве $X \times Y$. Множество всех таких вектор-функций обозначим символом $S(X,Y)$.

Каждая вектор-функция $f : x \to X \times Y$ определяет упорядоченную пару (f_1, f_2) отображений $f_1 : X \to X, f_2 : X \to Y$ по формуле $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$, где $x \in X$. Такие отображения f_1, f_2 называются соответственно *первой* и *второй компонентами вектор-функции* f. С другой стороны, для любой пары отображений $f_1 : X \to X, f_2 : X \to Y$ полупрямое произведение [2] отображений f_1, f_2 является вектор-функцией $f : x \to X \times Y$ с компонентами f_1, f_2. Таким образом, вектор-функции можно отождествлять с упорядоченными парами их компонент и множество $S(X,Y)$ можно отождествлять с декартовым произведением $X \times F(X,Y)$ множеств $X, F(X,Y)$.

Для вектор-функций f, g из множества $S(X,Y)$ естественно определяется операция умножения по формуле $f \cdot g = (f_1 g_1, f_1 g_2)$, где $f_1 g_1, f_1 g_2$ – обычные композиции отображений. Известно [2], что такое умножение вектор-функций ассоциативно. Значит, множество $S(X,Y)$ с операцией умножения вектор-функций образует полугруппу, которая называется *симметрической полугруппой вектор-функций на множестве X со значениями в множестве $X \times Y$*. Подполугруппы полугруппы $S(X,Y)$ называются *полугруппами вектор-функций на множестве X со значениями в множестве $X \times Y$*.

Актуальность изучения полугрупп вектор-функций определяется их приложениями к теории автоматов.

Следуя [1], под автоматом будем понимать алгебраическую систему вида $A = (X, S, Y, \delta, \lambda)$, состоящую из множества состояний X, полугруппы входных символов S, множества выходных символов Y, функции переходов $\delta : X \to X$ и выходной функции $\lambda : X \to Y$, которые при любых $x \in X,\ s, t \in S$ удовлетворяют условиям: $\delta(x, st) = \delta(\delta(x, s), t)$ и $\lambda(x, st) = \lambda(\delta(x, s), t)$. Каждый символ $s \in S$ определяет пару отображений $\delta_s : X \to X, \lambda_s : X \to Y$, которые каждое состояние автомата $x \in X$ переводят в новое состояние $\delta_s(x) = \delta(x, s)$ и в выходной символ $\lambda_s(x) = \lambda(x, s)$. Следовательно, символ $s \in S$ определяет на множестве X вектор-функцию $f_s = (\delta_s, \lambda_s)$ со значениями в множестве $X \times Y$. По определению автомата последовательное действие входных символов $s, t \in S$ на состояние $x \in X$ приводит к следующему результату:

$$f_t(f_s(x)) = (\delta(\delta(x, s), t), \lambda(\delta(x, s), t)) = (\delta(x, st), \lambda(x, st)) = f_{st}(x).$$

Это означает, что соответствие $s \mapsto f_s$ $(s \in S)$ является гомоморфизмом полугруппы S в симметрическую полугруппу вектор-функций $S(X, Y)$. Очевидно, что это соответствие взаимно однозначно в том и только том случае, если для различных $s, t \in S$ найдется такой $x \in X$, что $\delta_s(x) \neq \delta_t(x)$ или $\lambda_s(x) \neq \lambda_t(x)$. Такие автоматы называются автоматами без равнодействующих сигналов.

Лемма 1. *Полугруппа входных символов автомата без равнодействующих сигналов $A = (X, S, Y, \delta, \lambda)$ изоморфна полугруппе его вектор-функций $\{f_s : s \in S\}$.*

Полугруппа S вектор-функций на множестве X со значениями в множестве $X \times Y$ называется *приемлемой*, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) для любого элемента a из множества X (соответственно Y) найдутся такие $x \in X, f \in S$, что $f_1(x) = a$ (соответственно $f_2(x) = a$);

2) найдутся $f, g \in S$ с постоянным отображением f_1 и тождественным преобразованием g_1.

Лемма 2. *Для любой приемлемой полугруппы S вектор-функций на множестве X со значениями в множестве $X \times Y$ справедливы следующие утверждения:*

1) элемент $f \in S$ в том и только том случае является правым нулем полугруппы S, если $f = (c_x, c_y)$ для некоторых $x \in X, y \in Y$;

2) *элемент $f \in S$ в том и только том случае является левой единицей полугруппы S, если $f = (\Delta_X, \psi)$ для тождественного преобразования Δ_X множества X и некоторого $\psi : X \to Y$;*

3) *элементы $f, g \in S$ в том и только том случае имеют одинаковые первые компоненты $f_1 = g_1$, если $f \cdot e = g \cdot e$ для некоторой левой единицы e полугруппы S.*

Теорема 1. *Пусть S – приемлемая полугруппа вектор-функций на множестве X со значениями в множестве $X \times Y$, S_1 – приемлемая полугруппа вектор-функций на множестве X_1 со значениями в множестве $X_1 \times Y_1$ и $\pi : S \to S_1$ – гомоморфизмом полугруппы S на полугруппу S_1. Тогда найдутся такие сюрьекции $\varphi : X \to X_1$ и $\psi_x : Y \to Y_1$ $(x \in X)$, что для любого $f \in S$ выполняется равенство: $\pi(f) = (\varphi^2(f_1), {f_2}^{f_1})$, где $\varphi^2(f_1) = \varphi^{-1}(f_1)\varphi$ и ${f_2}^{f_1}(\varphi(a)) = \psi_{f_1(a)}(f_2(a))$ для всех $a \in X$.*

Следствие 1. *Пусть S – приемлемая полугруппа вектор-функций на множестве X со значениями в множестве $X \times Y$, S_1 – приемлемая полугруппа вектор-функций на множестве X_1 со значениями в множестве $X_1 \times Y_1$. Тогда отображение $\pi : S \to S_1$ в том и только том случае является изоморфизмом полугруппы S на полугруппу S_1, если найдутся такие биекции $\varphi : X \to X_1$ и $\psi_x : Y \to Y_1$ $(x \in X)$, что для любого S выполняется равенство: $\pi(f) = (\varphi^2(f_1), {f_2}^{f_1})$, где ${f_2}^{f_1}(\varphi(a)) = \psi_{f_1(a)}(f_2(a))$ для всех $a \in X$.*

Следствие 2. *Группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}S(X,Y)$ полугруппы $S(X,Y)$ всех вектор-функций на множестве X со значениями в множестве $X \times Y$ изоморфна сплетению $P(Y) \wr P(X)$ групп $P(Y), P(X)$ перестановок множеств Y и X соответственно.*

Полученные результаты могут использоваться в изучении эпиморфизмов категории автоматов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Плоткин Б.И., Гринглаз Л.Я., Гварамия А.А.* Элементы алгебраической теории автоматов. М.: Высш. шк., 1994. 192 с.

2. *Вагнер В.В.* Теория отношений и алгебра частичных отображений // Теория полугрупп и ее приложения. Саратов, 1965. Вып. 1. С. 3–178.