УДК 517.984

Н. П. Бондаренко

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПУЧКА МАТРИЧНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Рассмотрим пучок операторов $L = L(Q_0, Q_1, h_0, h_1, H_0, H_1)$, порожденный дифференциальным выражением

$$\ell(Y, \rho) := Y'' + (\rho^2 \cdot I + 2i\rho Q_1(x) + Q_0(x))Y, \quad x \in (0, \pi), \tag{1}$$

и краевыми условиями

$$\begin{aligned} U(Y) &:= Y'(0) + (i\rho h_1 + h_0)Y(0) = 0, \\ V(Y) &:= Y'(\pi) + (i\rho H_1 + H_0)Y(\pi) = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $Y(x) = [y_k(x)]_{k=\overline{1,m}}$ — вектор-столбец, I — единичная матрица размера $m \times m$, $Q_s(x) = [Q_{s,jk}(x)]_{j,k=\overline{1,m}}$ — $m \times m$ матрицы с элементами $Q_{s,jk}(x) \in W_1^s[0, \pi]$, $s = 0, 1$, $h_s = [h_{s,jk}]_{j,k=\overline{1,m}}$, $H_s = [H_{s,jk}]_{j,k=\overline{1,m}}$, где $h_{s,jk}$, $H_{s,jk}$ — комплексные числа.

Будем предполагать, что $\det(I \pm h_1) \neq 0$ и $\det(I \pm H_1) \neq 0$. Эти условия исключают из рассмотрения задачи типа Редже [1], которые требуют отдельного исследования.

Обратные задачи спектрального анализа для пучков дифференциальных операторов в скалярном случае ($m = 1$) изучались в работах [2, 3]. В данной статье исследуется обратная задача восстановления матричного пучка L вида (1)-(2) по матрице Вейля, представляющей собой обобщение функции Вейля скалярного оператора. Получены асимптотические формулы для решений уравнения $\ell(Y, \rho) = 0$ и теорема единственности решения обратной задачи. Для исследования используется метод спектральных отображений [4], с помощью которого также может быть получена конструктивная процедура решения обратной задачи.

Пусть $S(x,\rho) = [S_{jk}(x,\rho)]_{j,k=\overline{1,m}}$, $C(x,\rho) = [C_{jk}(x,\rho)]_{j,k=\overline{1,m}}$ и $\varphi(x,\rho) = [\varphi_{jk}(x,\rho)]_{j,k=\overline{1,m}}$ — матричные решения уравнения $\ell(Y,\rho) = 0$, удовлетворяющие начальным условиям

$$S(0,\rho) = C'(0,\rho) = U(\varphi) = 0, \quad S'(0,\rho) = C(0,\rho) = \varphi(0,\rho) = I.$$

При каждом фиксированном $x \in [0,\pi]$ элементы матриц $S(x,\rho)$, $C(x,\rho)$ и $\varphi(x,\rho)$ являются целыми аналитическими функциями по ρ.

Лемма 1. *При $x \in (0,\pi)$, $\nu = 0, 1$, $|\rho| \to \infty$ справедливы асимптотические формулы*

$$S^{(\nu)}(x,\rho) = \frac{(i\rho)^{\nu-1}}{2} e^{i\rho x} P_-(x)[I] + \frac{(-i\rho)^{\nu-1}}{2} e^{-i\rho x} P_+(x)[I],$$
$$C^{(\nu)}(x,\rho) = \frac{(i\rho)^{\nu}}{2} e^{i\rho x} P_-(x)[I] + \frac{(-i\rho)^{\nu}}{2} e^{-i\rho x} P_+(x)[I[,$$

где $[I] := I + O(\rho^{-1})$ и матрицы $P_\pm(x)$ являются решениями задач Коши

$$P'_\pm(x) = \pm Q_1(x) P_\pm(x), \quad P_\pm(0) = I.$$

Замечание. В скалярном случае $(m = 1)$

$$P_\pm(x) = e^{\pm \int_0^x Q_1(t)\,dt}.$$

Будем называть *решением Вейля* пучка L матричное решение $\Phi(x,\rho) = [\Phi_{jk}(x,\rho]_{j,k=\overline{1,n}}$ уравнения $\ell(Y,\rho) = 0$, удовлетворяющее условиям $U(\Phi) = I$, $V(\Phi) = 0$, и *матрицей Вейля* матрицу $M(\rho) := \Phi(0,\rho)$. Нетрудно видеть, что

$$\Phi(x,\rho) = S(x,\rho) + \varphi(x,\rho) M(\rho), \quad M(\rho) = -(V(\varphi))^{-1} V(S). \qquad (3)$$

Пучок L имеет счетное множество собственных значений $\{\rho_n\}$, которые совпадают с нулями характеристической функции $\Delta(\rho) := \det V(\varphi)$. В силу формул (3) элементы матриц $\Phi(x,\rho)$ и $M(\rho)$ мероморфны по ρ, и их полюса совпадают с собственными значениями $\{\rho_n\}$.

Лемма 2. *Справедливо представление*

$$M(\rho) = \sum_n \sum_{\nu=1}^{m_n} \frac{M_{n\nu}}{(\rho - \rho_n)^\nu},$$

где m_n — кратность собственного значения ρ_n, $M_{n\nu}$ — некоторые матричные коэффициенты.

Величины $\{\rho_n, M_{n\nu}\}$ будем называть *спектральными данными* пучка L. В силу леммы 2 спектральные данные однозначно определяют матрицу Вейля и наоборот. Поэтому следующие две задачи эквивалентны.

Обратная задача 1. По матрице Вейля $M(\rho)$ построить коэффициенты $Q_s(x)$, h_s, H_s, $s = 0, 1$, пучка L.

Обратная задача 2. По спектральным данным $\{\rho_n, M_{n\nu}\}$ построить коэффициенты пучка L.

В данной статье ограничимся рассмотрением обратной задачи 1.

Наряду с L рассмотрим пучок $\tilde{L} = L(\tilde{Q}_0, \tilde{Q}_1, \tilde{h}_0, \tilde{h}_1, \tilde{H}_0, \tilde{H}_1)$ того же вида, что и L, но с другими коэффициентами. Условимся, что если некоторый символ γ обозначает объект, относящийся к L, то $\tilde{\gamma}$ обозначает аналогичный объект, относящийся к $\tilde{L}$. Докажем теорему единственности решения обратной задачи 1.

Теорема 1. *Если $M(\rho) = \tilde{M}(\rho)$, то $L = \tilde{L}$. Таким образом, задание матрицы Вейля однозначно определяет пучок L.*

Доказательство. 1. Введем обозначения $\tau := \operatorname{Im}\rho$, $\Theta_\delta^\pm := \{\rho \in \mathbb{C}\colon \delta \le \pm\arg\rho \le \pi - \delta\}$, $\delta > 0$. Используя лемму 1, получаем асимптотические формулы при $\nu = 0, 1$, $\rho \in \Theta_\delta^\pm$, $|\rho| \to \infty$:

$$\begin{array}{l} \varphi^{(\nu)}(x,\rho) = \frac{(\mp i\rho x)^\nu}{2} e^{\mp i\rho x} P_\pm(x)(I \pm h_1) + O(\rho^{-1} e^{|\tau| x}), \\ \Phi^{(\nu)}(x,\rho) = -(\mp i\rho)^{\nu-1} e^{\pm i\rho x} P_\pm^\bullet(x)(P_\pm^\bullet(0))^{-1}(I \pm h_1)^{-1} + O(\rho^{\nu-2} e^{-|\tau| x}), \end{array} \quad (4)$$

где матрицы $P_\pm^\bullet(x)$ — решения задач Коши

$$P_\pm^{\bullet\prime}(x) = \mp Q_1(x) P_\pm^\bullet(x), \quad P_\pm^\bullet(\pi) = I.$$

2. Положим

$$\begin{aligned} \ell^*(Z,\rho) &:= Z'' + Z(\rho^2 \cdot I + 2i\rho Q_1(x) + Q_0(x)), \\ U^*(Z) &:= Z'(0) + Z(0)(i\rho h_1 + h_0), \\ V^*(Z) &:= Z'(\pi) + Z(\pi)(i\rho H_1 + H_0), \end{aligned}$$

где $Z = [z_k]_{k=\overline{1,m}}^T$ — вектор-строка (T — знак транспонирования). Пусть $\varphi^*(x,\rho)$ и $\Phi^*(x,\rho)$ — матричные решения уравнения $\ell^*(Z,\rho) = 0$, удовлетворяющие условиям

$$\varphi^*(0,\rho) = U^*(\Phi^*) = I, \quad U^*(\varphi^*) = V^*(\Phi^*) = 0.$$

Введенные решения обладают аналогичными свойствами с $\varphi(x,\rho)$ и $\Phi(x,\rho)$. В частности, справедливы асимптотические формулы при $\rho \in \Theta_\delta^\pm$, $|\rho| \to \infty$

$$\begin{array}{l} \varphi^{*(\nu)}(x,\rho) = \frac{(\mp i\rho x)^\nu}{2} e^{\mp i\rho x}(I \pm h_1)P_\pm^*(x) + O(\rho^{-1}e^{|\tau|x}), \\ \Phi^{*(\nu)}(x,\rho) = -(\mp i\rho)^{\nu-1}e^{\pm i\rho x}(I \pm h_1)^{-1}(P_\pm^{\bullet *}(0))^{-1}P_\pm^{\bullet *}(x) + O(\rho^{\nu-2}e^{-|\tau|x}), \end{array} \quad (5)$$

где $P_\pm^*(x)$ и $P_\pm^{\bullet *}(x)$ — решения задач Коши

$$\begin{array}{ll} P_\pm^{*\prime}(x) = \pm P_\pm^*(x)Q_1(x), & P_\pm^*(0) = I, \\ P_\pm^{\bullet *\prime}(x) = \mp P_\pm^{\bullet *}(x)Q_1(x), & P_\pm^{\bullet *}(\pi) = I. \end{array}$$

Обозначим $M^*(\rho) := \Phi^*(0,\rho)$. Нетрудно показать, что $M^*(\rho) \equiv M(\rho)$.

3. Определим блочные матрицы $\mathcal{P}(x,\rho) = [\mathcal{P}_{jk}(x,\rho)]_{j,k=1,2}$ по формуле

$$\mathcal{P}(x,\rho)\begin{bmatrix} \tilde\varphi(x,\rho) & \tilde\Phi(x,\rho) \\ \tilde\varphi'(x,\rho) & \tilde\Phi'(x,\rho) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi(x,\rho) & \Phi(x,\rho) \\ \varphi'(x,\rho) & \Phi'(x,\rho) \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{array}{l} \mathcal{P}_{j1}(x,\rho) = \varphi^{(j-1)}(x,\rho)\tilde\Phi^{*'}(x,\rho) - \Phi^{(j-1)}(x,\rho)\tilde\varphi^{*'}(x,\rho), \\ \mathcal{P}_{j2}(x,\rho) = \Phi^{(j-1)}(x,\rho)\tilde\varphi^*(x,\rho) - \varphi^{(j-1)}(x,\rho)\tilde\Phi^*(x,\rho). \end{array} \quad (7)$$

Используя формулы (4) и (5), для $\rho \in \Theta_\delta^\pm$, $|\rho| \to \infty$, $x \in (0,\pi)$ вычисляем

$$\mathcal{P}_{11}(x,\rho) = \Omega(x) + O(\rho^{-1}), \quad \mathcal{P}_{12}(x,\rho) = \rho^{-1}\Lambda(x) + O(\rho^{-2}), \quad (8)$$

где

$$\begin{array}{l} \Omega(x) := \dfrac{1}{2}\left(P_-(x)\tilde P_+^*(x) + P_+(x)\tilde P_-^*(x)\right), \\ \Lambda(x) := \dfrac{1}{2i}\left(P_-(x)\tilde P_+^*(x) - P_+(x)\tilde P_-^*(x)\right). \end{array}$$

С другой стороны, согласно (7)

$$\begin{array}{l} \mathcal{P}_{11} = \varphi\tilde S^{*'} - S\tilde\varphi^{*'} + \varphi(\tilde M^* - M)\tilde\varphi^*, \\ \mathcal{P}_{12} = S\tilde\varphi^* - \varphi\tilde S^* + \varphi(M - \tilde M^*)\tilde\varphi^*, \end{array}$$

Поскольку $\tilde M^*(\rho) \equiv \tilde M(\rho) \equiv M(\rho)$, для любого фиксированного $x \in [0,\pi]$ элементы матриц $P_{11}(x,\rho)$ и $P_{12}(x,\rho)$ целые функции по ρ порядка не больше 1. Используя теорему Фрагмена – Линделёфа и соотношения (8), получаем $P_{11}(x,\rho) \equiv \Omega(x)$, $P_{12}(x,\rho) \equiv 0$, $\Lambda(x) \equiv 0$.

Нетрудно показать, что $\Omega'(x) = 0$ и, следовательно, $\Omega(x) \equiv \Omega(0) \equiv I$, $x \in [0, \pi]$. Таким образом, $P_{11}(x, \rho) \equiv I$, $x \in [0, \pi]$. В силу (6) $\varphi(x, \rho) \equiv \equiv \tilde{\varphi}(x, \rho)$, $\Phi(x, \rho) \equiv \tilde{\Phi}(x, \rho)$ и $L = \tilde{L}$. $\square$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Национального научного совета Тайваня (проекты 10-01-00099 и 10-01-92001-ННС).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Юрко В. А.* О краевых задачах с параметром в краевых условиях // Известия Арм. ССР. Сер. Математика. 1984. Т. 19, № 5. С. 398–409.

2. *Гасымов М. Г., Гусейнов Г. Ш.* Определение оператора диффузии по спектральным данным // ДАН Азерб. ССР. 1981. Т. 37, № 2. С. 19–23.

3. *Бутерин С. А., Юрко В. А.* Обратная спектральная задача для пучков дифференциальных операторов на конечном интервале // Вестн. Башкир. ун-та. 2006. № 4. С. 8–12.

4. *Юрко В. А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: физматлит, 2007. 384 с.

УДК 512.57

Д. А. Бредихин

О ГРУППОИДАХ БИНАРНЫХ ОТНОШЕНИЙ С ДИОФАНТОВЫМИ ОПЕРАЦИЯМИ

Множество бинарных отношений Φ, замкнутое относительно некоторой совокупности Ω операций над ними, образует алгебру (Φ, Ω), называемую *алгеброй отношений*. Всякая такая алгебра может быть рассмотрена как упорядоченная отношением теоретико-множественного включения $\subset$. Теория алгебр отношений является существенной составной частью современной общей алгебры и алгебраической логики. Основы абстрактно-алгебраического подхода к изучению алгебр отношений были заложены в работах А. Тарского [1, 2]. Как правило, операции над отношениями задаются с помощью формул логики предикатов первого порядка. Такие операции называются *логическими*. Логические операции могут быть классифицированы по виду задающих их формул. Операция называется *диофантовой* [3] (в другой терминологии примитивно-позитивной [4]), если она может быть задана с помощью формулы, которая в своей предваренной нормальной форме содержит лишь операции конъюнкции и кванторы существования. Диофантовы операции допускают описания с помощью графов см.[3, 4]. Эквациональные и квазиэквациональные теории алгебр отношений с диофантовыми операциями описаны в [5, 6].