$j_1, j_2 \in \{1,2,3,\dots,n\}$ по определению $\bar{\jmath}_2 = (j_1, j_2)$, т.е. $j_1, j_2 \subset \bar{\jmath}_2$, и по утверждению 2 теоремы 1 $P_{\bar{\jmath}_2} \le P_{j_1}$ и $P_{\bar{\jmath}_2} \le P_{j_2}$. Таким образом, $P_{\bar{\jmath}_2} = P_{j_1} \wedge P_{j_2}$. И для любого $\bar{\jmath}_k = (j_1, j_2, \dots, j_k)$ $P_{\bar{\jmath}_k} = P_{j_1} \wedge P_{j_2} \wedge \ldots \wedge P_{j_k}$, где $\wedge$ операция пересечения в решётке разбиений множества объектов G. Следовательно, множество $L_p(\mathbb{K})$ является подрешёткой решётки $L_p(G)$. При этом P_0 является единицей в решётках $L_p(\mathbb{K})$ и $L_p(G)$, $P_{\bar{n}}$ является нулём решётки $L_p(\mathbb{K})$. Разбиения P_j, где $j \in \{1,2,3,\dots,n\}$, являются коатомами решётки $L_p(\mathbb{K})$.

Обратно, пусть дана некоторая подрешётка $L \subseteq Lp(G)$, содержащая P_0, где G — конечное множество. Пусть $P_1, P_2, \dots, P_n$ — все коатомы этой решётки, а $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ — соответствующие эквивалентности на множестве G. Построим контекст $\mathbb{K}(L) = (G, (P_i), \rho)$, где $\rho = \{(g, \varepsilon_1(g), \varepsilon_2(g), \dots, \varepsilon_n(g)) |\ g \in G\}$. Построенный контекст является однозначным, поскольку любой $g \in G$ попадает только в один блок $\varepsilon_j(g)$ разбиения P_j, $j \in \{1,2,3,\dots,n\}$. Любой собственный концепт контекста $\mathbb{K}(L)$ по любому $\bar{\jmath}_k \subseteq \bar{n}$ является одним из блоков разбиения $P_{\bar{\jmath}_k}$ множества G. И поскольку $P_{\bar{\jmath}_k} = P_{j_1} \wedge P_{j_2} \wedge \ldots \wedge P_{j_k}$ (является пересечением некоторых коатомов решётки L), то решётки L и $L_p(\mathbb{K}(L))$ состоят из одних и тех же элементов, т.е. $L = L_p(\mathbb{K}(L))$. $\square$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Novikov V. E.* Formal conceptual analysis within n-ary relation context // Вестник Саратовского государственного технического университета, 2006. № 9 (15), вып. 2. С. 18–22.

2. *Ganter B., Wille R.* Formal Concept Analysis. Mathematical Foundatoins. Berlin : Springer Verlag, 1999.

3. *Вагнер В. В.* Теория отношений и алгебра частичных отображений // Теория полугрупп и её приложения. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1965. Вып.1. С. 3–178.

4. *Мейер Д.* Теория реляционных баз данных. М. : Мир, 1987.

5. *Новиков В. Е.* Решётки концептов в однозначном контексте // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2010. Вып. 12. С. 52–55.

УДК 519.4

В. В. Розен

АБСТРАКТНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ПАРЕТО-ПРЕДПОЧТЕНИЙ

Математическая модель задачи многокритериальной оптимизации может быть представлена в виде набора

$$G = \langle A, q_1, ..., q_m \rangle \,, \tag{1}$$

где A — множество допустимых альтернатив, $q_1, ..., q_m$ — критерии оценки этих альтернатив. В данной статье рассматриваются задачи многокритериальной оптимизации с качественными критериями. Качественный критерий характеризуется тем, что шкалой для его измерения служит некоторое линейно упорядоченное множество (цепь) $\langle C_j, \leq_j \rangle$; формально представляет собой отображение $q_j : A \to C_j$. Далее полагаем $J = \{1, ..., m\}, q(a) = (q_1(a), ..., q_m(a))$ — векторная оценка альтернативы $a \in A$.

Одна из важнейших задач многокритериальной оптимизации состоит в построении отношения предпочтения на множестве альтернатив. Решение этой задачи предполагает задание некоторого *решающего правила.* Наиболее известным решающим правилом является *Парето-предпочтение* [1], которое осуществляется по формуле

$$a_1 \leq^{Par} a_2 \Leftrightarrow (\forall j \in J) q_j(a_1) \leq q_j(a_2). \tag{2}$$

С каждой задачей многокритериальной оптимизации G вида (1) связана структура Парето-предпочтения $\left\langle A, \leq^{Par} \right\rangle$. В данной статье решается задача абстрактной характеристики структур Парето-предпочтений, ассоциированных с задачами вида (1) с фиксированным множеством шкал критериев $\langle C_j, \leq_j \rangle_{j \in J}$. Полагаем $C = \prod\limits_{j \in J} C_j$. Мы предполагаем выполнение следующего дополнительного условия:
(α) : если $a_1 \neq a_2$, то хотя бы для одного $j \in J$ имеет место $q_j(a_1) \neq q_j(a_2)$.

Основная теорема. *Для того чтобы структура предпочтений $\langle A, \omega \rangle$ совпадала со структурой Парето-предпочтений, ассоциированной с некоторой задачей G вида (1), необходимо и достаточно, чтобы $\langle A, \omega \rangle$ было упорядоченным множеством, размерность которого не превосходит m.*

Доказательство. *Необходимость.* Из определения (2) непосредственно следует, что отношение $\leq^{Par}$ является рефлексивным и транзитивным, т.е. отношением квазипорядка. В силу дополнительного условия (α) оно будет отношением порядка на множестве A. Оценим его размерность.

Пусть $w_1 : 1 < 2 < \cdots < m$ — отношение линейного порядка на множестве индексов J. Далее, для любого $j^* = 1, ..., m$ через w_{j^*} обозначаем линейный порядок на J, который совпадает с w_1 на $J - \{j^*\}$ и является первым (наименьшим) элементом относительно w_{j^*}. Пусть λ^{j^*} лексикографическое произведение семейства цепей $\langle C_j, \leq_j \rangle_{j \in J}$, где множество индексов J упорядочено отношением порядка w_{j^*}. Как известно

[1, 2], λ^{j^*} является линейным порядком на C. Определим на множестве A бинарное отношение ω^{j^*}, $j^* = 1, ..., m$, по правилу

$$a_1 \leq^{\omega^{j^*}} a_2 \leftrightarrow q(a_1) \leq^{\lambda^{j^*}} q(a_2). \tag{3}$$

Учитывая дополнительное условие (α), получаем, что отношение ω^{j^*} является отношением линейного порядка на A.

Лемма 1. *Имеет место равенство:*

$$\leq^{Par} = \bigcap_{j^* \in J} \omega^{j^*}. \tag{4}$$

Доказательство. Установим вначале при произвольном $j^* \in J$ включение $\leq^{par} \subseteq \omega^{j^*}$. В самом деле, пусть $a_1 \leq^{Par} a_2$, то есть $q_j(a_1) \leq q_j(a_2)$ при всех $j \in J$. Зафиксируем произвольно $j^* = 1, ..., m$. Пусть j_0 — первый номер в упорядочении w_{j^*}, при котором $q_{j_0}(a_1) \neq q_{j_0}(a_2)$. Так как справедливо $q_{j_0}(a_1) \leq^{j_0} q_{j_0}(a_2)$ то выполнено строгое неравенство $q_{j_0}(a_1) <^{j_0} q_{j_0}(a_2)$, поэтому $q(a_1) \leq^{\lambda^{j^*}} q(a_2)$ и согласно (3) имеем $a_1 \leq^{\omega^{j^*}} a_2$, что доказывает включение $\leq^{par} \subseteq \omega^{j^*}$. В силу произвольности $j^* \in J$ получаем в (4) включение слева направо. Установим обратное включение. Пусть выполнено $a_1 \leq a_2$ относительно порядка $\bigcap\limits_{j^* \in J} \omega^{j^*}$. Тогда при каждом $j^* \in J$ имеем $a_1 \leq^{\omega^{j^*}} a_2$, то есть $q(a_1) \leq^{\lambda^{j^*}} q(a_2)$. Полагая последовательно $j^* = 1, ..., m$, имеем согласно определения лексикографического порядка λ^{j^*} :

$$q_1(a_1) \leq_1 q_1(a_2), ..., q_m(a_1) \leq_m q_m(a_2),$$

то есть $q(a_1) \leq^{Par} q(a_2)$, что доказывает лемму 1. Из леммы 1 непосредственно следует, что размерность порядка $\leq^{Par}$ не превосходит мощности множества J, то есть числа m, что доказывает необходимость.

Достаточность. Пусть $dim \langle A, \omega \rangle = m^* \leq m$. Надо построить задачу многокритериальной оптимизации с качественными критериями так, чтобы отношение порядка ω совпало с Парето-предпочтением этой задачи. По определению размерности упорядоченного множества существует $m^* \leq m$ линейных порядков ω_j на A , пересечением которых является ω. Дублируя, в случае необходимости, $m - m^*$ линейных порядков, приходим к равенству

$$\omega = \bigcap_{j=1...m} \omega_j. \tag{5}$$

При каждом $j \in J$ рассмотрим множество C_j, равномощное множеству A, и пусть $q_j : A \to C_j$ — биекция, реализующая взаимно-однозначное соответствие между ними. Определим отношение $\leq^j$ на C_j , полагая

$$q_j(a_1) \leq^j q_j(a_2) \leftrightarrow a_1 \leq^{\omega_j} a_2. \tag{6}$$

Очевидно, что $\leq^j$ является линейным порядком на C_j, то есть $\left\langle C_j, \leq^j \right\rangle$ — цепь. В силу (5), (6) имеем

$$a_1 \leq^{\omega} a_2 \leftrightarrow (\forall j = 1, ..., m) a_1 \leq^{\omega_j} a_2 \leftrightarrow (\forall j = 1, ..., m) q_j(a_1) \leq^j q_j(a_2).$$

Данная равносильность означает, что порядок ω совпадает с Парето-предпочтением для задачи многокритериальной оптимизации $\langle A, q_1, ..., q_m \rangle$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Подиновский В. В., Ногин В.Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М. : Наука, 1982.

2. *Скорняков Л.А.* Элементы теории структур. М. : Наука, 1970.

УДК 514.133

Л. Н. Ромакина

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ОРТРИСЫ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

На гиперболической плоскости $\hat{H}$ положительной кривизны [1] зададим пучок Θ прямых с центром в действительной точке S и действительную прямую l, $l \neq \Theta$, полюс L которой относительно абсолютной линии γ не совпадает с точкой S. На каждой прямой пучка построим точку, сопряженную относительно абсолюта точке пересечения этой прямой с l. Множество всех таких точек назовем *ортрисой* с *базой* l и *вершиной* S. Прямую LS назовем *главной осью*, а пучок Θ — *определяющим* пучком ортрисы. Соответственно типу прямой l ортрису будем называть *гиперболической*, *эллиптической* или *параболической*. В данной статье исследуем гиперболические ортрисы.

Если точка S является внешней (внутренней) относительно абсолюта плоскости $\hat{H}$, определяющий пучок Θ соответственно типу измерения в нем будем называть *гиперболическим* (*эллиптическим*). Если $S \in \gamma$, пучок Θ назовем *параболическим*.