УДК 512.643.2+512.558

В.Б. Поплавский

О СОХРАНЕНИИ РАВЕНСТВА ЕДИНИЦЕ ПОЛУПЕРМАНЕНТОВ БУЛЕВЫХ $\{0,1\}$-МАТРИЦ

Задача сохранения матричных свойств при преобразовании матриц с элементами из некоторого полукольца является одной из самых широко представленных работ по этой теме в современной математической литературе (см., напр., обзор [1]). В этой статье изучаются свойства множества квадратных матриц $\mathbf{M}$ над булевой $\{0,1\}$-алгеброй с полуперманентами, равными 1, которые для матрицы $A=(a^i_j)$ определяются формулами

$$\overset{+}{\nabla} A = \bigcup_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in \overset{+}{P}} \cap_{k=1}^{n} a_k^{\lambda_k}, \qquad \overset{-}{\nabla} A = \bigcup_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in \overset{-}{P}} \cap_{k=1}^{n} a_k^{\lambda_k}.$$

Здесь $\overset{+}{P}$ и $\overset{-}{P}$ обозначают множества всех четных и нечетных n - подстановок ($n \geq 2$). Доказывается утверждение, что произвольный матричный многочлен с аргументами из $\mathbf{M}$ и коэффициентами из булевой $\{0,1\}$-алгебры сохраняет равенство полуперманентов. Таким образом, мы даем примеры нелинейных преобразований, сохраняющих линейные инварианты бинарных отношений на конечном множестве, каковыми являются полуперманенты $\{0,1\}$-матриц, соответствующих этим бинарным отношениям на конечном множестве. В качестве следствий получаем, что множество $\mathbf{M}$, пополненное нулевой матрицей, является одновременно полукольцом и полумодулем над булевой $\{0,1\}$-алгеброй.

Теорема. Произвольный матричный многочлен

$$f(A,B,C,\ldots) = \bigcup_{i=0}^{r_i}\bigcup_{j=0}^{r_j}\bigcup_{k=0}^{r_k}\ldots(\lambda_{ijk\ldots} \cap A^{m_i}B^{n_j}C^{p_k}\ldots)$$

с аргументами из множества $\mathbf{M}$ булевых квадратных $\{0,1\}$-матриц одинаковых размеров с полуперманентами, равными 1, и коэффициентами $\lambda_{ijk\ldots}$ из булевой $\{0,1\}$-алгебры сохраняет равенство полуперманентов. Причем, если не все коэффициенты $\lambda_{ijk\ldots}$ равны нулю, то и $\overset{+}{\nabla} f(A,B,C,\ldots) = \overset{-}{\nabla} f(A,B,C,\ldots) = 1$.

Доказательство. Следует показать, во-первых, что произведение $A \sqcap B$ матриц A, B с полуперманентами, равными 1, есть матрица с полуперманентами, равными 1. Во-вторых, объединение $A \cup B$ матриц A, B из $\mathbf{M}$ есть матрица из $\mathbf{M}$.

Для доказательства первого воспользуемся известными формулами для полуперманентов (см., напр., [2, 3] или [4, §19]):

$$(\overset{+}{\nabla} A \cap \overset{+}{\nabla} B) \cup (\overset{-}{\nabla} A \cap \overset{-}{\nabla} B) \subseteq \overset{+}{\nabla} (A \sqcap B)$$

и

$$(\overset{-}{\nabla} A \cap \overset{+}{\nabla} B) \cup (\overset{+}{\nabla} A \cap \overset{-}{\nabla} B) \subseteq \overset{-}{\nabla} (A \sqcap B).$$

Следовательно, из $\overset{\pm}{\nabla} A = \overset{\pm}{\nabla} B = 1$ получаем $\overset{\pm}{\nabla} (A \sqcap B) = 1$.

Показать, что объединение матриц $A \cup B$ с полуперманентами, равными 1, есть матрица с полуперманентами, равными 1, можно таким же образом, если учитывать неравенства

$$\overset{+}{\nabla} A \cup \overset{+}{\nabla} B \subseteq \overset{+}{\nabla} (A \cup B)$$

и

$$\overset{-}{\nabla} A \cup \overset{-}{\nabla} B \subseteq \overset{-}{\nabla} (A \cup B),$$

которые несложно проверить.

То, что пересечение $\lambda \cap A$ матрицы A с равными полуперманентами с булевым коэффициентом λ есть матрица с равными полуперманентами, является совершенно очевидным.

Таким образом, произвольный матричный многочлен с аргументами из $\mathbf{M}$ и коэффициентами из булевой $\{0,1\}$-алгебры сохраняет равенство полуперманентов. $\square$

Пример. Нетрудно увидеть, что множество матриц размера 2×2 с равными 1 полуперманентами состоит из одной матрицы вида $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Матрицами размера 3×3 из $\mathbf{M}$ являются матрицы вида

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и любые матрицы, которые содержат указанные матрицы A, B или C.

Следствие 1. Множество $\mathbf{M} \cup \{O\}$ булевых квадратных $\{0,1\}$ – матриц одинаковых размеров с полуперманентами, равными 1, пополненное нулевой матрицей O, является полукольцом с аддитивной операцией $\cup$ и мультипликативной операцией произведения булевых матриц.

Доказательство. Достаточно проверить выполнение законов дистрибутивности:

$$(A \cup B) \cdot C = A \cdot C \cup B \cdot C, \qquad A \cdot (B \cup C) = A \cdot B \cup A \cdot C.$$

Действительно, для элемента $((A \cup B) \cdot C)^i_j$, стоящего в строчке i и столбце j матрицы $(A \cup B) \cdot C$, получаем

$$((A \cup B) \cdot C)^i_j = \bigcup_k ((A^i_k \cup B^i_k) \cap C^k_j) = \bigcup_k (A^i_k \cap C^k_j) \cup \bigcup_k (B^i_k \cap C^k_j) = (A \cdot C \cup B \cdot C)^i_j.$$

Вторая формула доказывается аналогично. □

Следствие 2. Множество $\mathbf{M} \cup \{O\}$ булевых квадратных $\{0,1\}$-матриц одинаковых размеров с полуперманентами, равными 1, пополненное нулевой матрицей O, является полумодулем с аддитивной операцией объединения матриц над полукольцом скаляров, которым является булева $\{0,1\}$- алгебра.

Доказательство. То, что любая линейная комбинация матриц из $\mathbf{M} \cup \{O\}$ является матрицей из $\mathbf{M} \cup \{O\}$, очевидно, является следствием доказанной выше теоремы. Таким образом, $\mathbf{M} \cup \{O\}$ образует полумодуль, то есть непустое множество с двумя операциями, объединением матриц $A \cup B = (a^i_j \cup b^i_j) \in \mathbf{B}_{m \times n}$ (заменяющим сложение) и пересечением матрицы с элементом из булевой алгебры $\lambda \cap A = (\lambda \cap a^i_j) \in \mathbf{B}_{m \times n}$ (заменяющим умножение на скаляр), которые удовлетворяют для любых матриц и булевых скаляров следующим аксиомам:

1) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;
2) $A \cup B = B \cup A$;
3) $A \cup O = A$;
4) $1 \cap A = A$;
5) $(\alpha \cap \beta) \cap A = \alpha \cap (\beta \cap A)$;
6) $(\alpha \cup \beta) \cap A = (\alpha \cap A) \cup (\beta \cap A)$;
7) $\alpha \cap (A \cup B) = (\alpha \cap A) \cup (\alpha \cap B)$. □

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Гутерман А.Э., Михалев А.В.* Общая алгебра и линейные отображения, сохраняющие матричные инварианты //Фундаментальная и прикладная математика. 2003. Т. 9, №1. С. 83–101.

2. *Поплавский В.Б.* Ориентированные определители произведения булевых матриц //Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2004. Вып. 6. С. 111–114.

3. *Golan J.S.* Semirings and their Applications. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999.

4. *Reutenauer C., Straubing H.* Inversion of matrices over a commutative semiring // J. of Algebra. 1984.Vol. 88. P. 350–360.