Раскрывая этот определитель, получим $\Delta(\lambda) = \sum_{J_k}[F_{J_k}]e^{\lambda\mu_{J_k}}$. Заметим, что асимптотика $[F_{J_k}]$ имеет место лишь в секторах S. Но в каждом из секторов коэффициенты этих разложений одинаковые.

Определение 1. Оператор L назовем *регулярным*, если выполняются условия 1°–2° и числа F_{J_k}, отвечающие угловым точкам μ_{J_k}, отличны от 0.

Определение 2. Регулярный оператор L назовем *усиленно регулярным*, если нули характеристического определителя $\Delta(\lambda)$ асимптотически простые и отделены друг от друга некоторым положительным числом $\delta > 0$.

Необходимые и достаточные условия отделённости корней $\Delta(\lambda)$ в терминах граничных точек μ_{J_k} и соответствующих им чисел F_{J_k} имеются в [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00270).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Рыхлов В. С.* Разложения по собственным функциям квазидифференциальных и интегральных операторов // Дис. ...канд. физ.-мат. наук. Саратов, 1981. 129 с.

2. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М. : Наука, 1969. 528 с.

3. *Тамаркин Я. Д.* О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды. Петроград : Тип. М. П. Фроловой, 1917. 308 с.

4. *Rykhlov V. S.* Asymptotical formulas for solutions of linear differential systems of the first order // Result. Math. 1999. V. 36. C. 342–353.

5. *Шкаликов А. А.* Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Тр. семинара. им. И. Г. Петровского. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1983. № 9. С. 190–229.

УДК 519.4

Д. С. Смирнова

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ЗАДАНИЯ ОТНОШЕНИЯ ПРЕДПОЧТЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ ПО КАЧЕСТВЕННЫМ КРИТЕРИЯМ

Будем рассматривать задачу многокритериальной оптимизации по качественным критериям в виде

$$G = \langle A, (q_j)_{j\in J}\rangle\,, \tag{1}$$

где A — произволное множество, содержащее не менее двух элементов (множество альтернатив), q_j — j-й критерий, который формально может быть задан как отображение $q_j : A \to C_j$, где $\left\langle C_j, \leq^j \right\rangle$ — некоторая цепь; будем предполагать, что каждая цепь C_j содержит не менее трех элементов. Множество J в общем случае может быть бесконечным. Элемент $q_j(a) \in C_j$ представляет собой значение j—го критерия для альтернативы $a \in A$. Набор $q(a) = (q_j(a))_{j \in J}$ называется *векторной оценкой альтернативы* a. Заметим, что формально q есть отображение множества A в $\prod\limits_{j \in J} C_j$.

Иногда на отображение q накладывают дополнительное условие (α):

$$(\forall j \in J) q_j(a_1) = q_j(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2. \tag{2}$$

Ясно, что условие (α) обеспечивает инъективность отображения q.

Обозначим через K класс задач многокритериальной оптимизации вида (1) с дополнительным условием (α). Будем предполагать, что на множестве J задан строгий частичный порядок $<$, причем условие $i < j$ интерпретируется таким образом, что критерий i важнее критерия j.

Для задачи $G \in K$ на множестве альтернатив A определим бинарное отношение предпочтения ω по следующей формуле:

$$a_1 \leq^\omega a_2 \Leftrightarrow (\forall j \in J)(q_j(a_1) \leq^j q_j(a_2) \vee (\exists i < j) q_i(a_1) <^i q_i(a_2)). \tag{3}$$

Замечание. Отношение ω является рефлексивным.

Действительно, условие $a \leq^\omega a$ выполняется при любом $a \in A$, так как для любого $j \in J$ имеет место $q_j(a) \leq^j q_j(a)$.

Основной результат данной статьи представляет следующая теорема.

Теорема 1. *Для того, чтобы для любой задачи $G \in K$ отношение ω было отношением порядка, необходимо и достаточно чтобы упорядоченное множество $\langle J, < \rangle$ удовлетворяло условию обрыва убывающих цепей (условию ОУЦ).*

Докажем вначале вспомогательное утверждение.

Лемма 1. Пусть $a_1 \leq^\omega a_2$. Тогда для всякого минимального элемента j^* в $\langle J, < \rangle$ выполнено $q_{j^*}(a_1) \leq^{j^*} q_{j^*}(a_2)$.

Доказательство. По основному определению (3) для $j^* \in J$ выполняется дизъюнкция:

$$q_{j^*}(a_1) \leq^{j^*} q_{j^*}(a_2) \vee (\exists i < j^*) q_i(a_1) <^i q_i(a_2).$$

Так как по предположению j^* — минимальный элемент в $\langle J, < \rangle$, то второй член дизъюнкции ложен, следовательно истинен, первый член дизъюнкции, то есть $q_{j^*}(a_1) \leq^{j^*} q_{j^*}(a_2)$.

Перейдем к доказательству теоремы.
Достаточность. Для доказательства надо проверить условия антисимметричности и транзитивности.

Транзитивность. Пусть $a_1 \leq^\omega a_2$ и $a_2 \leq^\omega a_3$, то есть выполнены следующие формулы:

$$(\forall j \in J)(q_j(a_1) \leq^j q_j(a_2) \vee (\exists i < j) q_i(a_1) <^i q_i(a_2)),$$

$$(\forall j \in J)(q_j(a_2) \leq^j q_j(a_3) \vee (\exists k < j) q_k(a_2) <^k q_k(a_3)).$$

Надо показать, что $a_1 \leq^\omega a_3$, то есть

$$(\forall j \in J)(q_j(a_1) \leq^j q_j(a_3) \vee (\exists l < j) q_l(a_1) <^l q_l(a_3)). \tag{4}$$

Предположим, что (4) неверно, тогда по логическому закону де Моргана получаем

$$(\exists j \in J)(q_j(a_1) >^j q_j(a_3) \wedge (\forall l < j) q_l(a_1) \geq^l q_l(a_3)). \tag{5}$$

Покажем, что тогда справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. Существует бесконечная последовательность $j_1 > j_2 > \dots$ такая, что для каждого $k = 1, 2, \dots$ выполнено

$$q_{j_k}(a_1) > q_{j_k}(a_2) \vee q_{j_k}(a_2) > q_{j_k}(a_3). \tag{6}$$

Проведем доказательство данного утверждения по индукции.

База индукции. В силу (4) можно положить $j_1 = j$, тогда (6) будет выполнено для j_1, действительно, в противном случае имеет место:

$$q_{j_1}(a_1) \leq^{j_1} q_{j_1}(a_2) \wedge q_{j_1}(a_2) \leq^{j_1} q_{j_1}(a_3),$$

и в силу транзитивности отошения $\leq^{j_1}$ получаем $q_{j_1}(a_1) \leq^{j_1} q_{j_1}(a_3)$, что противоречит формуле (5).

Шаг индукции. Пусть существует последовательность $j_1 > j_2 > \dots > j_n$ такая, что для всех $j_k, k = 1, \dots, n$ выполняется $q_{j_k}(a_1) > q_{j_k}(a_2) \vee q_{j_k}(a_2) > q_{j_k}(a_3)$.

Рассмотрим первый случай (для второго случая рассуждения аналогичны). По определению (3), учитывая, что $q_{j_n}(a_1) \leq^{j_n} q_{j_n}(a_2)$ не выполнено, имеем $(\exists i < j_n) q_i(a_1) <^i q_i(a_2)$. Тогда условие $q_i(a_2) \leq^i q_i(a_3)$ не может быть выполнено, так как в этом случае получаем, что $q_i(a_1) <^i q_i(a_3)$, где $i < j_n < ... < j_1 = j$, то есть $i < j$, что противоречит условию (5). Поэтому получаем, что $q_i(a_2) > q_i(a_3)$. Это позволяет положить $j_{n+1} = i$, что доказывает утверждение 1.

Таким образом исходя из предположения, что не выполнено $a_1 \leq^\omega a_3$ мы доказали утверждение 1, которое противоречит условию ОУЦ для упорядоченного множества $\langle J, < \rangle$. Следовательно, наше предположение неверно, то есть выполняется $a_1 \leq^\omega a_3$, что завершает доказательство транзитивности.

Антисимметричность доказывается аналогично.

Необходимость. Покажем, что если упорядоченное множество $\langle J, < \rangle$ не удовлетворяет условию ОУЦ, то существует задача $G \in K$, для которой ω не является отношением порядка.

Так как $\langle J, < \rangle$ не удовлетворяет условию ОУЦ, то существует бесконечная цепь вида $j_1 > j_2 > ... > j_n > ...$ По предположению каждая цепь C_j содержит не менее трех элементов. Зафиксируем в цепи C_{j_s} элемнты $0_s < 1_s < 2_s$.

Рассмотрим задачу G вида (1), для которой $A = a_1, a_2, a_3$ и функции q_{j_s} заданы таблицей (для всех остальных $j \in J$ полагаем $q_j(a_1) = q_j(a_2) = q_j(a_3) = 1_s$).

q / a	q_{j_1}	q_{j_2}	q_{j_3}	q_{j_4}	$\dots$
a_1	1_1	2_2	1_3	2_4	$\dots$
a_2	2_1	0_2	2_3	0_4	$\dots$
a_3	0_1	1_2	0_3	1_4	$\dots$

Согласно определению (3) и из анализа таблицы получаем: $a_1 \leq^\omega a_2$. В самом деле, при нечетных s имеем $q_{j_s}(a_1) = 1_s < 2_s = q_{j_s}(a_2)$, то есть $q_{j_s}(a_1) \leq^\omega q_{j_s}(a_2)$. Если s четно, то мы переходим к более важному критерию с номером $s+1$ и получаем $q_{j_{s+1}}(a_1) < q_{j_{s+1}}(a_2)$. Аналогично выполнено $a_2 \leq^\omega a_3$.

Однако, условие $a_1 \leq^\omega a_3$ здесь не имеет места, так как $q_{j_s}(a_1) > q_{j_s}(a_3)$ для всех $s = 1, 2, ...$ Таким образом отношение ω для построенной задачи G нетранзитивно, а значит, не является отношением порядка.

Теорема доказана.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Скорняков Л. А.* Элементы теории структур. М. : Наука, 1970.