УДК 539.3

Н. С. Анофрикова, М. В. Вильде

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ПРОДОЛЬНЫЕ ДВУМЕРНЫЕ ВОЛНЫ В ВЯЗКОУПРУГОЙ ДВУХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЕ

В работах [1, 2] описаны асимптотические методы, разработанные для решения двумерных задач для упругих и вязкоупругих однослойных пластин и тонкостенных оболочек с помощью асимптотических методов. В данной статье предложен метод решения модельной задачи об определении двумерной безмоментной составляющей в случае вязкоупругой двухслойной пластины.

Рассмотрим полубесконечную двухслойную пластину, оба слоя которой выполнены из вязкоупругих материалов. Считаем, что вязкоупругое поведение материалов описывается моделью стандартного вязкоупругого тела с условием упругого объемного расширения. Введем декартову систему координат $(x_1,\ \ x_2,\ \ z)$, совмещая плоскость $O\,x_1x_2$ со срединной плоскостью пластины и направляя ось z по нормали к срединной плоскости. Примем следующие обозначения: l—номер слоя $(l\,=\,1,2)$, $2h_l$ — толщина слоя, $2h$— толщина пластины. Будем предполагать, что наружные поверхности пластины свободны от нагрузки. Граничные условия на стыке двух слоев пластины — условия непрерывного контакта. Двумерные уравнения для безмоментной составляющей в указанном случае были получены в [3] из трехмерных уравнений вязкоупругости методом асимптотического интегрирования. В случае осесимметричной задачи последние запишутся в виде

$$\frac{\partial T_1}{\partial x_1} - 2\rho h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = 0,$$

$$\begin{array}{c} 2\left[h_1E_1f_{21}f_{31}(f_{32}^2 - f_{42}^2) + h_2E_2f_{22}f_{32}(f_{31}^2 - f_{41}^2)\right]\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \\ = (f_{31}^2 - f_{41}^2)(f_{32}^2 - f_{42}^2)T_1, \\ -2\left[h_1E_1f_{21}f_{41}(f_{32}^2 - f_{42}^2) + h_2E_2f_{22}f_{42}(f_{31}^2 - f_{41}^2)\right]\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \\ = (f_{31}^2 - f_{41}^2)(f_{32}^2 - f_{42}^2)T_2, \end{array} \tag{1}$$

где $f_{il} = \left(\frac{1}{t_{il}} + \frac{\partial}{\partial t}\right)$, $f_{3l} = \frac{1}{3}\left(\frac{1-2\nu_l}{t_{2l}} + 2\frac{1+\nu_l}{t_{1l}}\right) + \frac{\partial}{\partial t}, f_{4l} = \frac{1}{3}\left(\frac{1-2\nu_l}{t_{2l}} - \frac{1+\nu_l}{t_{1l}}\right) - \nu_l\frac{\partial}{\partial t}$, $i \neq j = 1,2$; $l = 1,2$, u_1 — перемещение вдоль оси x_1, T_i — нормальные усилия, t_{1l} — характерное время релаксации, t_{2l} — характерное время ползучести, E_l, ν_l — мгновенные значения модуля Юнга и коэффициент Пуассона материала l-го слоя, ρ — усредненная плотность, задаваемая формулой

$$\rho = \frac{\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2}{h}.$$

Предположим, что к торцу пластины $x_1 = 0$, находящейся в состоянии покоя в начальный момент времени прикладывается ударное продольное воздействие тангенциального типа, симметричное относительно x_2. В этом случае граничное условие на торце $x_1 = 0$ можно взять в виде

$$T_1 = 2hIH(t), \tag{2}$$

где I— амплитуда, $H(t)$ — единичная функция Хевисайда.

Начальные условия берем в форме

$$u_1 = \frac{\partial\, u_1}{\partial\, t} = 0, \quad \text{при } t = 0. \tag{3}$$

Таким образом, нам нужно решить систему (1) при граничных условиях (2) и начальных условиях (3).

Перейдем в уравнениях (1), граничных условиях (2) и начальных условиях (3) к безразмерным переменным и к безразмерным параметрам

$$\xi = \frac{x_1}{h}, \tau = \frac{tc}{h}, \tau_{il} = \frac{t_{il}c}{h}, \tag{4}$$

где $c^2 = \frac{\tilde{E}}{\rho h}$, $\tilde{E} = \sum_{l=1}^{2} \frac{E_l h_l}{1-\nu_l^2}$. Так же введем безразмерные усилия и перемещения

$$T_i = 2\tilde{E}T_i^*, u_1 = hu_1^*. \tag{5}$$

Применим к решению системы уравнений, записанной в безразмерной форме, интегральное преобразование Лапласа по переменной τ. В результате получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка для нахождения изображения перемещения u_1^L:

$$\frac{d^2 u_1^L}{d\xi^2} - \frac{s^2}{A(s)} u_1^L = 0, \tag{6}$$

где s — параметр интегрального преобразования и

$$A(s)=\frac{E_1h_1}{\tilde{E}}\frac{L_{21}}{L_{11}}+\frac{E_2h_2}{\tilde{E}}\frac{L_{22}}{L_{12}},\, L_{1k}=\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1-2\nu_k}{\tau_{2k}}+2\frac{1+\nu_k}{\tau_{1k}}\right)+s\right)^2-$$
$$-\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1-2\nu_k}{\tau_{2k}}-\frac{1+\nu_k}{\tau_{1k}}\right)-\nu_k s\right)^2,$$
$$L_{2k}=\left(\frac{1}{\tau_{2k}}+s\right)\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1-2\nu_k}{\tau_{2k}}+2\frac{1+\nu_k}{\tau_{1k}}\right)+s\right).$$

Выражение для изображения продольного усилия получаем в виде

$$T_1^L=A(s)\frac{du_1^L}{d\xi}. \tag{7}$$

Граничное условие (2) в изображениях принимает вид

$$T_1^L=\frac{Ih}{\tilde{E}s} \quad \text{при} \quad \xi=0. \tag{8}$$

Решение (6) имеет экспоненциальный вид, определяемый квадратным характеристическим уравнением. При построении безмоментного решения, затухающего с удалением от торца $\xi=0$, выбираем корень, имеющий отрицательную действительную часть. Подставляя полученное решение в (7) и удовлетворяя условию (8), получим следующее решение для изображения продольного усилия:

$$T_1^L=\frac{Ih}{\tilde{E}s}\exp\left(\left(-\frac{s}{\sqrt{A(s)}}\right)\xi\right). \tag{9}$$

Решение в оригиналах будем искать с помощью разложения изображений в ряд по отрицательным степеням

$$T_1^L=\frac{Ih}{\tilde{E}s}\exp\left(-\left(s+D_1-\frac{D_2}{s}\right)\xi\right), \tag{10}$$

$$D_1=\frac{1}{2}\left(\frac{b_1}{a_1}-\frac{b_2}{a_2}\right), D_2=\frac{1}{2}D_1^2-\frac{1}{2}\left(\frac{c_1}{a_1}-\frac{c_2}{a_2}-2D_1\frac{b_2}{a_2}\right), a_1=\left(1-\nu_1^2\right)\left(1-\nu_2^2\right),$$

$$b_1=\sum_{k=1}^{2}(n_k+\nu_k m_k)\left(1-\nu_l^2\right), c_1=\sum_{k=1}^{2}\left(n_k^2-m_k^2\right)\left(1-\nu_l^2\right)+4\left(n_1+\nu_1 m_1\right)\left(n_2+\nu_2 m_2\right),$$

$$a_2=\sum_{k=1}^{2}p_k\left(1-\nu_l^2\right), b_2=\sum_{k=1}^{2}\left(2p_l\left(n_k+\nu_k m_k\right)+p_l\left(n_l+\frac{1}{\tau_{2l}}\right)\left(1-\nu_k^2\right)\right), p_l=\frac{E_l h_l}{\tilde{E}},$$

$$c_2 = \sum_{k=1}^{2} \left(p_l \left(n_k^2 - m_k^2 \right) + 2p_l \left(n_l + \frac{1}{\tau_{2l}} \right) \left(n_k + \nu_k m_k \right) + p_l \frac{n_l}{\tau_{2l}} \left(1 - \nu_k^2 \right) \right),$$

$$n_i = \frac{1}{3} \left(\frac{1 - 2\nu_i}{\tau_{2i}} + 2\frac{1 + \nu_i}{\tau_{1i}} \right),$$

$$m_i = \frac{1}{3} \left(\frac{1 - 2\nu_i}{\tau_{2i}} - \frac{1 + \nu_i}{\tau_{1i}} \right), i = 1, 2, \quad l \neq k = 1, 2.$$

Воспользуемся формулой обратного перехода (см. [1])

$$\frac{1}{s^{n+1}} \exp \left(- \left(\frac{s}{c} - \frac{g}{s} \right) \xi \right) \Rightarrow \left(\frac{c\tau - \xi}{cg\xi} \right)^{\frac{n}{2}} I_n \left(2\sqrt{\frac{g}{c} \xi \left(c\tau - \xi \right)} \right) H \left(c\tau - \xi \right),$$

где $I_n(t)$ — модифицированные функции Бесселя.

Выпишем окончательное решение, ограничиваясь первым членом ряда:

$$T_1^* = \frac{Ih}{\tilde{E}} e^{-D_1 \xi} I_0 \left(2\sqrt{D_2 \xi \left(\tau - \xi \right)} \right) H \left(\tau - \xi \right). \tag{11}$$

Путем предельного перехода в выражении (11) при $t_{1l} \to \infty$ и $t_{2l} \to \infty$ можно получить решение для упругой двухслойной пластины. Если кроме того в полученных выражениях положить $E_1 = E_2$ и $\nu_1 = \nu_2$, то придем к соответствующим решениям для случая однослойных пластин.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00545).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Kaplunov J. D., Kossovich L. Yu., Nolde E. V.* Dynamics of thin walled elastic bodies. Academic Press, San Diego, 1998. 226 p.

2. *Бажанова Н. С., Коссович Л. Ю., Сухоловская М. С.* Нестационарные волны в вязкоупругих оболочках: модель Максвелла // Изв. высш. учеб. завед. Сев.-Кавк. регион. Сер. Естеств. науки. 2000. № 2. С. 17–24.

3. *Анофрикова Н. С., Шевцова Ю. В.* Низкочастотные длинноволновые тангенциальные приближения трехмерных динамических уравнений теории вязкоупругости для случая двухслойных пластин // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2010. Вып.12. С. 126–130.