Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента (проект МД-1025.2012.8).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Землянухин А. И., Могилевич Л. И.* Нелинейные волны в цилиндрических оболочках: солитоны, симметрии, эволюция. Саратов : Сарат. гос. техн. ун-т, 1999. 132 с.

2.*Аршинов Г. А.,Землянухин А. И., Могилевич Л. И.* Двумерные уединенные волны в нелинейной вязкоупругой деформируемой среде // РАН. Акустический журнал. 2000. Т. 46, № 1. С. 116–117

3.*Аршинов Г. А., Могилевич Л. И.* Статические и динамические задачи вязкоупругости. Саратов : Сарат. гос. агр. ун-т, 2000. 152 с

4. *Москвитин В. В.* Сопротивление вызко-упругих материалов. М. : Наука, 1972. 328 с.

УДК 539.3

Г. М. Иванов

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА РАСТЯЖЕНИЯ ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ С ПОДКРЕПЛЕННЫМ И СВОБОДНЫМ ОТВЕРСТИЯМИ

В статьях [1–4] разработаны приближенные методы решения обратных задач плоской теории упругости и изгиба тонких изотропных плит для многосвязных областей с неизвестной границей. В данной статье приводится решение задачи по определению равнопрочных контуров двух отверстий в растягиваемой изотропной пластинке при условии, что одно из них подкреплено жестким кольцом, а другое свободно от внешних усилий.

Рассмотрим всестороннее растяжение усилиями p тонкой изотропной пластинки, ослабленной двумя криволинейными отверстиями, причем размер одного из них значительно превышает размер другого. На первом равнопрочном контуре, подкрепленным жестким кольцом, должны выполняться граничные условия

$$\sigma_r = P; \quad \sigma_\theta = \nu P; \quad \tau_{r\theta} = 0, \tag{1}$$

а на втором равнопрочном контуре, свободном от внешних усилий, — условия:

$$\sigma_r = 0; \quad \sigma_\theta = Q; \quad \tau_{r\theta} = 0. \tag{2}$$

Здесь ν — коэффициент Пуассона, P, Q — постоянные подлежащие определению.

Пусть формы искомых контуров L_1 и L_2 определяются отображающими функциями

$$z = R_1\omega_1(\zeta_1), \quad z = R_2\omega_2(\zeta_2) + l, \tag{3}$$

где l — расстояние между центрами отверстий, а $R_2 > R_1$.

Граничные условия (1) и (2) на равнопрочных контурах $L_k (k = 1, 2)$ можно представить в виде

$$Re\Phi(t_k) = A_k; \tag{4}$$

$$\sigma^2\omega_k'(\sigma)(\overline{t_k}\Phi'(t_k) + \Psi(t_k)) = B_k\overline{\omega_k'(\sigma)}. \tag{5}$$

Здесь

$$A_1 = P(1+\nu)/4; \quad B_1 = -P(1-\nu)/2; \quad A_2 = Q/4; \quad B_2 = Q/2. \tag{6}$$

Комплексные потенциалы имеют представления [2]

$$\Phi(z) = p/2; \quad \Psi(z) = \Psi_1(z) + \Psi_2(z). \tag{7}$$

Каждая функция $\Psi_k(z)$, характеризующая возмущение напряженного состояния возле соответствующего отверстия, является голоморфной вне его контура и имеет на бесконечности порядок $O(1/z^2)$.

Из граничных условий (5) находим величины, определяющие постоянные напряжения в точках каждого из равнопрочных контуров:

$$\sigma_r = P = \frac{2}{1+\nu}p; \quad \sigma_\theta = \nu P = \frac{2\nu}{1+\nu}p; \quad \tau_{r\theta} = 0 \text{ на } L_1; \tag{8}$$

$$\sigma_r = 0; \quad \sigma_\theta = Q = 2p; \quad \tau_{r\theta} = 0 \text{ на } L_2. \tag{9}$$

Для оставшихся неопределенными функций выберем представления

$$\omega_k(\zeta_k) = \zeta_k + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{m_{kn}}{\zeta_k^n}; \quad \Psi_k(z) = \Psi_k^*(\zeta_k) = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{b_{kn}}{\zeta_k^n}. \tag{10}$$

При удовлетворении граничного условия на контуре большего отверстия пренебрежем возмущением напряженного состояния, вызванного наличием малого отверстия, полагая $\Psi_1(t_2) = 0$. Это позволяет достаточно просто найти функции

$$\omega_2(\zeta_2) = \zeta_2; \quad \Psi_2(z) = \frac{B_2 R_2^2}{(z-l)^2}. \tag{11}$$

Следовательно, больший равнопрочный контур, свободный от внешних усилий, является окружностью.

Рассмотрим граничное условие на меньшем подкрепленном равнопрочном контурею. Вблизи этого контура представим функцию $\Psi_2(z)$ разложением по малому параметру $\varepsilon_1 = R_1/l$. С точностью до квадрата этого параметра имеем

$$\Psi_2(t_1) = B_2\varepsilon_2^2(1 + 2\varepsilon_1\omega_1(\sigma) + 3\varepsilon_1^2\omega_1^2(\sigma) + ...). \tag{12}$$

Здесь отношение $\varepsilon_2 = R_2/l$ также является малым (меньшим 1). Функцию $\Psi_2(z)$ будем считать определенной вторым выражением (12). Используя приближенное представление (13), из граничного условия на меньшем равнопрочном контуре методов рядов для функции, определяющей форму этого контура, найдем следующее приближенное представление:

$$\omega_1(\sigma) = \sigma + \frac{m_{11}}{\sigma} + \frac{m_{12}}{\sigma^2} + \frac{m_{13}}{\sigma^3}. \tag{13}$$

Здесь

$$m_{11} = \frac{\varepsilon_2^2}{(1-\nu)/(1+\nu) - 3\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2}; \; m_{12} = \varepsilon_1\varepsilon_2^2\frac{1+\nu}{1-\nu}; \; m_{13} = \varepsilon_1^2\varepsilon_2^2\frac{1+\nu}{1-\nu}. \tag{14}$$

Следовательно, форма подкрепленного равнопрочного контура от относительных размеров отверстий и расстояния между ними, так и от механических свойств материала пластинки.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Иванов Г. М., Космодамианский А. С.* Определение формы равнопрочных отверстий в тонких изотропных плитах // Докл. АН УССР. Сер. «А». 1973, № 7. С. 634–636.

2. *Иванов Г. М., Космодамианский А. С.* Определение формы равнопрочных контуров отверстий, подкрепленных жесткими кольцами // Докл. АН УССР. Сер. «А». 1973. № 10. С. 913–919.

3. *Иванов Г. М., Космодамианский А. С.* Обратные задачи изгиба тонких изотропных плит // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1974, № 5. С. 53–56.

4. *Иванов Г. М.* Обратная задача изгиба изотропной плиты с подкрепленным и свободным отверстиями // Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела : материалы IV Междунар. науч. конф., посв. памяти акад. НАН Украины А. С. Космодамианского. Донецк : ООО «Юго–Восток, Лтд», 2006. С. 61–63.