Изд-во. Сарат. ун-та. 2010. Вып. 12. С. 159–164.

8. *Маркушин А. Г.* К разработке динамической теории сыпучего тела с твердым зерном // Аэродинамика. Ударно-волновые процессы : межвуз. сб. науч. тр. Саратов, Вып. 15(18). 2001. С. 96.

9. *Биргер И. А.* Теория пластического течения при неизотермическом нагружении // Изв. АН СССР. Сер. Механика и машиностроение. 1964. № 1. С. 193.

10.*Квапил Р.* Движение сыпучих материалов в бункерах. М. : Госгортехиздат, 1961. -80 с. 33.

УДК 539.3

В. Ю. Ольшанский, А. В. Серебряков, И. Ф. Паршина

ВЛИЯНИЕ ЖЕСТКОСТИ ЧУВСТВИТЕЛЬНОГО ЭЛЕМЕНТА НА ХАРАКТЕРИСТИКИ ДАТЧИКА ИНЕРЦИАЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Рассматривается датчик инерциальной информации. Это устройство предназначено для измерения одного из компонент угловой скорости вращения контролируемого объекта. Конструкция датчика включает в себя чувствительный элемент в форме упругого куба массой M с ребром l, а также микроэлектромеханические структуры в виде двух взаимно, перпендикулярных пьезокерамических пластин Π_1 и Π_2. Обе пластины имеют равные толщины $h_1 = h_2 = h$. У каждой пластины одно из оснований закреплено, а другое находится в контакте с чувствительным элементом. Контакт реализован так, что на пластины передаются только нормальные механические усилия. На пластину Π_1 подается переменный ток. Вследствие этого за счет обратного пьезоэффекта возбуждаются упругие волны, которые вызывают колебания чувствительного элемента. При наличии угловой скорости переносного вращения чувствительный элемент как присоединенная масса воздействует на пластину Π_2. За счет прямого пьезоэффекта в этой пластине генерируется электрический ток. Учитывается, что выбор материала для изготовления чувствительного элемента определяет его податливость, которая в свою очередь влияет на распространение в чувствительном элементе упругих волн и тем самым — на положение его центра масс. Требуется рассчитать амплитудно-частотные характеристики датчика.

Рассматривается связанная динамическая задача электроупругости для системы упругих тел. Микроэлектромеханические структуры (МЭМС) — пластины, у которых по толщине распространяются упругие волны. Эти волны связаны с электрическим полем за счет явления пьезоэффекта. Рассматривается режим установившихся колебаний, потому что период колебаний пластин мал и за один период угловая скорость Ω изменяется незначительно. Учитывается наличие вязкого трения. Выбрав систему координат с осями, нормальными к основаниям пластин, представим упругие перемещения функциями $u_k(x_k, t)$ и электрические потенциалы — функциями $\psi_k(x_k, t)$, где $k = 1, 2$.

В безразмерной форме уравнения механических колебаний можно представить в виде

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} + 2\alpha \frac{\partial u_k}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k^2}, k = 1, 2. \tag{1}$$

Для электрических потенциалов используются уравнения вынужденной электростатики [1] в виде

$$\frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x_k^2} = \frac{k_{33}^2}{1 - k_{33}^2} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k^2}, k = 1, 2. \tag{2}$$

В формулы (2) входит коэффициент k_{33}^2 — продольный статический коэффициент электромеханической связи. Считается, что обе пластины запкреплены на корпусе датчика.

Граничные условия на контакте МЭМС с чувствительным элементом (ЧЭ) выглядят следующим образом:

$$\frac{\partial u_1(h_1, t)}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_1(h_1, t)}{\partial x_1} = m\left(-\frac{\partial^2 u_{C1}(t)}{\partial t^2} + 2\omega \frac{\partial u_{C2}(t)}{\partial t}\right),$$

$$\frac{\partial u_2(h_2, t)}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi_2(h_2, t)}{\partial x_2} = m\left(-\frac{\partial^2 u_{C2}(t)}{\partial t^2} - 2\omega \frac{\partial u_{C1}(t)}{\partial t}\right), \tag{3}$$

куда входят безразмерные комплексы $m = Ms_{33}c^2/Ah$, $\omega = \Omega_3 h/c$.

Движения центра масс C ЧЭ получаются в результате осреднения по объему ЧЭ перемещений элементов сплошной среды. Используется приближенная оценка механических колебаний в ЧЭ. При этом полагается, что колебания можно разложить на независимые составляющие $v_1(x_1, t)$ и $v_2(x_2, t)$ вдоль осей координат. Тогда

$$\frac{\partial u_{Ck}(t)}{\partial t} = \frac{1}{l} \int_{h_k}^{h_k+l} \frac{\partial v_k(x_k, t)}{\partial t}\, dx_k, \frac{\partial^2 u_{Ck}(t)}{\partial t^2} = \frac{1}{l} \int_{h_k}^{h_k+l} \frac{\partial^2 v_k(x_k, t)}{\partial t^2}\, dx_k, k = 1, 2. \tag{4}$$

Для перемещений $v_1(x_1,t)$, $v_2(x_2,t)$ приходим к волновым уравнениям вида

$$\frac{\partial^2 v_k}{\partial t^2} + 2\alpha_v \frac{\partial v_k}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 vk}{\partial x_k^2}, k = 1, 2, \tag{5}$$

где величина a^2 определяется отношением скоростей упругих волн в МЭМС и в ЧЭ. К уравнениям (5) добавляются условия неразрывного контакта между пьезопластинами и ЧЭ, а также условия на свободных поверхностях ЧЭ.

Краевая задача решалась для случая, когда внешнее напряжение изменяется по закону $U(t) = U_0 \sin \beta t$. Перемещения удается выразить в виде

$$u_k(x_k,t) = 2Re\left((A_{k1}\mathrm{ch}\lambda x_k + A_{k2}\mathrm{sh}\lambda x_k)\exp(i\beta t)\right), k = 1, 2,$$

$$v_k(x_k,t) = 2Re\left((B_{k1}\mathrm{ch}\mu x_k + B_{k2}\mathrm{sh}\mu x_k)\exp(i\beta t)\right), k = 1, 2. \tag{6}$$

В формулы (6) входят волновые числа λ, μ. Эти величины зависят от упругих и вязких свойств пьезокерамики и материала ЧЭ. Константы $A_{11}, \ldots, B_{22}$ определяются из граничных условий.

Силу тока удается представить [2] в виде

$$I(t) = \left(A\frac{c}{h}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{d_{33}}{s_{33}} \cdot \frac{\partial u_2(h_2,t)}{\partial x_2} - \frac{\epsilon_{33}}{d_{33}} \cdot \frac{\partial \psi_2(h_2,t)}{\partial x_2}\right). \tag{7}$$

Здесь d_{33} — пьезоэлектрическая постоянная, ϵ_{33} — диэлектрическая проницаемость при постоянных деформациях.

Были проведены численные эксперименты и получены амплитудно-частотные характеристики датчика при различных отношениях скоростей упругих волн в МЭМС и ЧЭ. При этом упругие характеристики МЭМС взяты для пьезокерамики марки ЦТС-19. Упругие свойства ЧЭ варьировались в диапазоне значений, которые характерны для соединений на основе кремния. Установлено, что по мере увеличения жесткости ЧЭ расчетные результаты приближаются к полученным ранее [3] для модели с недеформируемым ЧЭ. Так, при $c_v = 1,6 \cdot c$ наблюдается несколько пиков амплитуд тока. Это объясняется тем, что МЭМС и ЧЭ работают как одно тело, в нем распространяются упругие волны. В случае, когда материал ЧЭ более жесткий по сравнению с пьезокерамикой ($c_v = 6 \cdot c$), выделяется одно пиковое значение, достигаемое при значении вынуждающей частоты β, близком к первой собственной частоте колебаний пластины.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А.* Электроупругость. Киев : Наук. думка, 1989. 280 с.

2. *Ольшанский В. Ю., Серебряков А. В., Абитова И. Ф.* О влиянии граничных условий на динамику чувствительного элемента пьезогироскопа // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2011. Сер. Физика. Т. 11, вып. 2. С. 51–54.

3. *Панкратов В. М., Ольшанский В. Ю., Нагар Ю. Н., Серебряков А. В.* Влияние диссипации на характеристики измерителя угловой скорости на основе взаимного пьезоэффекта // Авиакосмическое приборостроение. 2010. № 8. С. 3–8.

УДК 517.51

И. А. Панкратов, Я. Г. Сапунков, Ю. Н. Челноков

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ ПЕРЕОРИЕНТАЦИИ ОРБИТЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОРБИТАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

В настоящей статье исследуется следующая задача оптимального управления ориентацией орбиты космического аппарата (КА): необходимо определить ограниченное по модулю управление $\mathbf{u}$:

$$-u_{max} \leq u \leq u_{max} < \infty, \quad u = \pm|\mathbf{u}|,$$

ортогональное плоскости орбиты КА, переводящее орбиту КА, движение центра масс которого описывается уравнениями

$$2\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt} = \boldsymbol{\lambda} \circ \boldsymbol{\omega}_\eta, \ \ \boldsymbol{\omega}_\eta = u\frac{r}{c}\boldsymbol{i}_1 + \frac{c}{r^2}\,\boldsymbol{i}_3,$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{r^2}, \ \ r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}, \ \ c = \mathrm{const},$$

из заданного начального состояния

$$t = t_0 = 0, \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad \boldsymbol{\lambda}(0) = \boldsymbol{\lambda}^{(0)} = \boldsymbol{\Lambda}^0 \circ \left(\cos\frac{\varphi_0}{2} + \boldsymbol{i}_3 \sin\frac{\varphi_0}{2}\right)$$

в конечное состояние

$$t = t_1 = ?, \quad \varphi(t_1) = \varphi_1, \quad \mathrm{vect}\left[\widetilde{\boldsymbol{\lambda}}(t_1) \circ \boldsymbol{\Lambda}^* \circ \left(\cos\frac{\varphi}{2} + \boldsymbol{i}_3 \sin\frac{\varphi}{2}\right)\right] = 0.$$

При этом необходимо минимизировать функционал

$$J_1 = \int_0^{t_1} (\alpha_1 + \alpha_2 u^2)\,dt \text{ или } J_2 = \int_0^{t_1} (\alpha_1 + \alpha_2|u|)\,dt, \ \alpha_1, \alpha_2 = \mathrm{const} \geq 0.$$

При $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$ имеем задачу быстродействия.