

На рис. 2 приведены проекции на плоскость (ω, χ) ветвей дисперсионного спектра и асимптотик корней для нескольких первых мод для случая $\nu = 0.3$, $k = 0.53$, $\beta = 1$. Асимптотики корней изображены серыми линиями. Численные решения представлены черными линиями. На рис. 3 приведены проекции на плоскость (ω, α) ветвей дисперсионного спектра и асимптотик корней для нескольких первых мод для того же случая.

Из графиков видно, что численные и асимптотические решения хорошо совпадают на интервале $0 \leq \omega \leq 0.4$. А с увеличением номера n наблюдается расширение интервала совпадения асимптотик с численным решением.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кожанова Т. В., Коссович Л. Ю. Дисперсионные уравнения Релея — Лэмба". Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1990. 21 с.
2. Karapınar J. D., Kossovich L. Ju., Nolde E. V. Dynamics of Thin Walled Elastic Bodies Jan Diego : Academic Press, 1998. PP. 226.
3. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев : Наук. думка, 1981. 284 с.
4. Анофрикова Н. С., Сергеева Н. В. Гармонические волны в наследственно-упругом слое: случай симметричного по нормальной координате НДС //Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2010. Вып. 12. С. 119–122.
5. Работнов Ю. И. Элементы наследственной механики твердых тел. Наука. 1977. 384 с.
6. Березин В. Л., Харитонова К. Ю. Применение метода математического микроскопа при решении трансцендентных уравнений //Проблемы точной механики и управления : Сб. науч. тр./ Институт проблем точной механики и управления РАН. Саратов. 2004. С. 119–122.

УДК 532.5:533.6.011.5

И. А. Чернов

ОБ УЧЕТЕ ПРОТИВОДАВЛЕНИЯ В ЗАДАЧЕ О ВЗРЫВЕ С ОБРАЗОВАНИЕМ ПУСТОТЫ В ЦЕНТРЕ ВЗРЫВА

Л. И Седов и независимо от него Тейлор [1] показали, что при сильном точечном взрыве в случаях показателя адиабаты $\gamma > 7$ в центре взрыва (ЦВ) возникает пустота, граница которой движется от ЦВ. В статье приведены детали двух типов (с- и без каверны) таких течений в автомобильной постановке, дано обсуждение задачи об учете противодействия для течения с каверной и расчет поправки к автомобильному течению. Обширная библиография по задаче о точечном взрыве есть в [2].

1. Система уравнений, описывающих неустановившиеся одномерные сферически симметричные течения идеального совершенного газа, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial u}{\partial r} + 2 \frac{\rho u}{r} = 0, \quad \frac{du}{dt} + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\partial c^2}{\partial r} + \frac{c^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial r} \right) = 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{c^2}{\rho^{\gamma-1}} \right) = 0, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial r}, \end{aligned} \quad (1)$$

где t — время, r — координата, $u = u(r, t)$ — скорость частицы жидкости, $a^2 = a^2(r, t)$ — квадрат скорости звука, $\rho = \rho(r, t)$ — плотность, γ — показатель адиабаты.

Если ударная волна (УВ) распространяется по области покоя с $\rho = \rho_1$, $c = c_1$, $u_1 = 0$, то сразу за УВ имеем u_2 , ρ_2 , p_2 — давление:

$$u_2 = \frac{2}{\gamma + 1} \frac{1 - q}{\sqrt{q}} a_1, \quad \rho_2 = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1 + 2q} \rho_1, \quad p_2 = \frac{2\gamma - (\gamma - 1)q}{(\gamma + 1)q} p_1, \quad (2)$$

где $q = \frac{a_1^2}{c^2} = \frac{1}{M_1^2}$, c — скорость УВ, $r_2 = r_2(t)$ — закон движения УВ.

В задаче о точечном взрыве при условии адиабатичности есть 5 определяющих параметров $\{\gamma, r, t, \rho_1, p_1, E_0$ — энергия заряда $\}$. Так как размерности $\{\rho_1, p_1, E_0\}$ независимы и их три, а не две, то это означает [1], что задача неавтономна.

Переход к безразмерным переменным осуществляется введением $\{\lambda, q\}$ вместо $\{r, t\}$ по формулам

$$\left\{ \lambda = \frac{r}{r_2(t)}, q \right\} \quad (3)$$

в качестве независимых переменных и

$$f(\lambda, q) = \frac{u}{u_2}, \quad g(\lambda, q) = \frac{p}{p_2} \quad (4)$$

— в роли искоемых безразмерных скорости, плотности и давления.

Траектория УВ определяется дифференциальным уравнением (здесь коэффициенты A_1, A_2, \dots определяют ее отклонение от обобщенной параболы $r_2 q^{\frac{1}{3}}$, что реализуется в автомоделном случае (когда пренебрегают давлением p_1 в зоне покоя))

$$r_2 \cdot \frac{d}{dr_2} q = \frac{3q}{1 + A_1 q + \dots}. \quad (5)$$

В [3, с. 44, ф-лы (1.44)] выписана система трех дифференциальных уравнений, эквивалентная системе (1) для $\{f, g, h\}$ в зависимости от $\{\lambda, q\}$.

Решение задачи о точечном взрыве представляют в виде асимптотических рядов (см. [3]) по степеням q :

$$\{f, g, h\}(\lambda, q) = \{f_0, g_0, h_0\}(\lambda) + q \{f_1, g_1, h_1\} + O(q^2). \quad (6)$$

Функции

$$\{f_0, g_0, h_0\}$$

это автомодельное решение Седова-Тейлора [1]. Удивительно то, что это решение записывается в явной аналитической форме. В фазовых переменных

$$V = \frac{f_0(\lambda)}{\lambda}, z = \frac{h_0(\lambda)}{\lambda^2 g_0(\lambda)} \quad (7)$$

оно сводится к алгебраической кривой третьего порядка ($ga = \gamma$):

$$z(V) = -\frac{V^2(-ga + 2V - 1)}{-1 - ga + 2gaV} \quad (8)$$

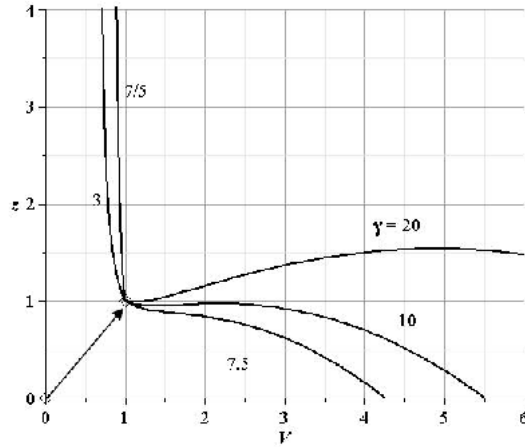


Рис. 1

На рис. 1 показаны кривые (8) для $\gamma = \frac{7}{5}, 3, \frac{15}{2}, 10, 20$. Начало координат $(0, 0)$ изображает область покоя, по которой движется УВ. Скачок из точки $(0, 0)$ в $(1, 1)$, — это разрыв на УВ. Течение позади УВ может развиваться двояко: 1) если $\gamma < 7$ (на рис.1 это две кривые с $\gamma = \frac{7}{5}$ и 3), то следует идти на лево-вверх с вертикальной асимптотой вплоть до бесконечности по z , где интегральная кривая совпадает с сепаратриссой расположенной там особой точки типа седла. Такое поведение соответствует приходу в ЦВ с условием $f_0 = 0$ при $\lambda = 0$; 2) если $\gamma > 7$ (на рис.1 это три кривые с $\gamma = \frac{15}{2}, 10, 20$), то течение изображается кривой, идущей от $(1, 1)$ вправо и затем вниз до оси $z = 0$ и попадающей на сепаратриссу другого седла при $z = 0$. Это соответствует границе каверны с $0 < \lambda_0 < 1$, где выполняется условие $g_0(\lambda_0) = h_0(\lambda_0) = 0$. При

$\gamma = 7$ течение позади УВ вырождается (изображается точкой бифуркации $(1, 1)$).

На рис. 2 показана величина относительного радиуса каверны λ_0 при различных $\gamma > 7$. Максимум его реализуется при γ близком к 15.4987.

На рис. 3 изображены *скорость частиц f_0 , плотность g_0 и давление h_0* для автомодельного течения при $\gamma = 15$, которое выбрано в качестве примера.

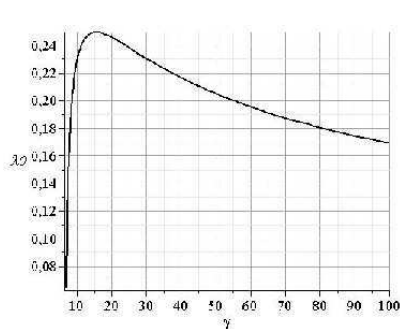


Рис. 2

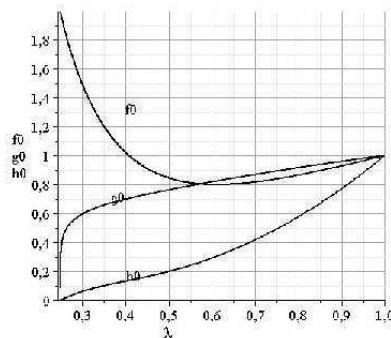


Рис. 3

3. Построение поправки к автомодельному приближению $\{f_1, g_1, h_1\}(\lambda)$ в целом соответствует методике, изложенной в [1-3], но осложняется наличием второй деформируемой в силу метода ПЛГ границы в краевой задаче для систем ОДУ — это граница каверны: $\lambda_k = \lambda_0 + q \cdot \lambda_1 + O(q^2)$. Для нахождения ее формы в неавтомодельном случае используется ОДУ вида (5) с заменой r_2 на r_k ; а $(1 + A_1 \cdot q + \dots)$ — на $(\lambda_0 + \lambda_1 \cdot q + \dots)$. Другая деталь — это вычисление коэффициента α (см. [1-3]), который отвечает за сохранность полной энергии движущегося объема жидкости и вводится по формуле $E_0 = (\alpha_0 + q \cdot \alpha_1 + \dots) \cdot E$, при этом

$$\alpha_0 = \frac{16}{25} \pi \int_{\lambda_0}^1 \left(\frac{h_1}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} g_1 f_0^2 + g_0 f_0 f_1 \right) d\lambda.$$

По автомодельному приближению находим $\lambda_0 = 0.249384$; $\alpha_0 = 0.269510$.

На рис. 4 представлены функции $\{f_1, g_1, h_1\}$ первой поправки. Для определения двух коэффициентов $\{A_1, \lambda_1\}$ использовались краевые условия:

$$h_1(\lambda_0) \cdot \frac{d}{d\lambda} g_0(\lambda_0) - g_1(\lambda_0) \cdot \frac{d}{d\lambda} h_0(\lambda_0) = 0, \lambda_1 = -\frac{h_1(\lambda_0)}{\frac{d}{d\lambda} h_0(\lambda_0)},$$

которые следуют из равенств: $h(\lambda_k) = g(\lambda_k) = 0$, $\lambda_k = \lambda_0 + q \cdot \lambda_1 + O(q^2)$ В результате получилось: $Ax_1 = 1.802244876422$, $\lambda_1 = -0.255763$; $\alpha_1 = -0.0449122$.

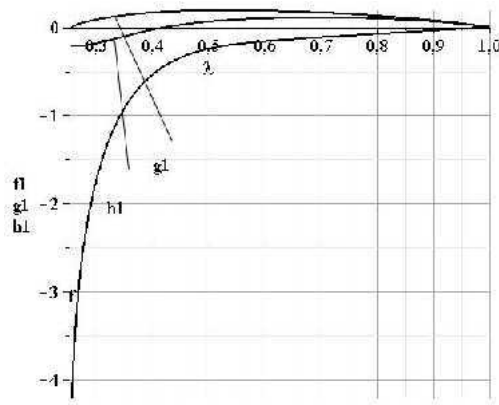


Рис. 4

Этих данных достаточно для вычисления траекторий УВ и каверны на плоскости $((R_2, R_k), \tau)$, а также оценки эволюции течения на малом интервале времени, когда начинает сказываться противодействие.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М. : Наука, 1965. 386 с.
2. Коробейников В. П. Задачи точечного взрыва. М. : Наука, 1985. 400 с.
3. Коробейников В. П., Мельникова Н. С., Рязанов Е. В. Теория точечного взрыва. М. : Физматгиз, 1961. 332 с.

УДК 517.984

Г. П. Шиндяпин, Р. И. Ливеровский

РЕЖИМЫ НЕЛИНЕЙНОЙ РЕФРАКЦИИ УДАРНЫХ ВОЛН В ГАЗОЖИДКОСТНЫХ СРЕДАХ

Исследованы процессы нелинейной рефракции ударных волн (УВ) на свободной поверхности, разделяющей газожидкостные среды (ГАЗ/ГАЗ; ГАЗ/ ГЖС; ГЖС/ГЖС), методами асимптотической теории коротких волн [1]. Для режимов с возникновением волны разрежения (RR, RRW) и режимов с возникновением отраженной ударной волны (RW) при падении ударной волны со стороны более плотной среды (режим *fast-slow*) получены аналитические выражения для основных характеристик $(q^+ = (p_3 - p_0)/(p_1 - p_0), \omega)$ в пространстве параметров подобия. Результаты развивают [2, 3] и представляют практический интерес для многочисленных приложений [4].

1. При падении УВ (AR) (рис. 1, 2) относительно малой интенсивности $P_{10} = (p_1 - p_0)/B_0^-$, $B_0^- = \rho_0^- c_0^{-2}$ под углом α к вертикали на свободную поверхность AE, разделяющую различные газожидкостные среды γ^+ , γ^- , возникают различные режимы рефракции: RR (рис. 1),